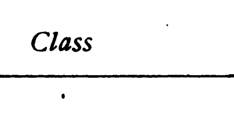
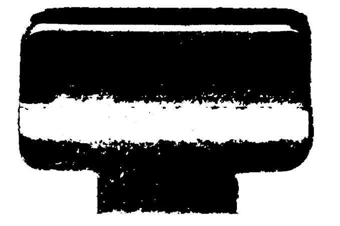
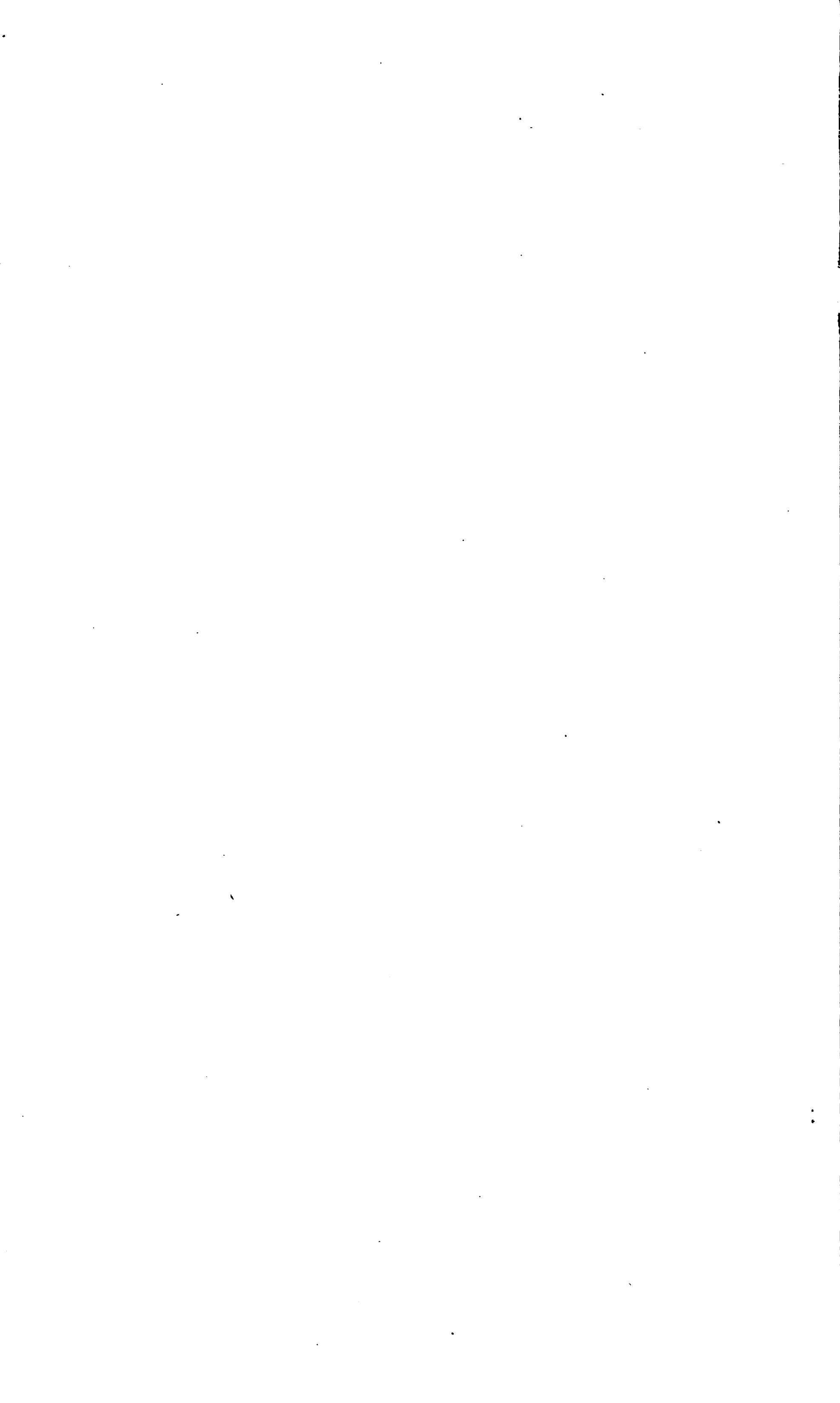
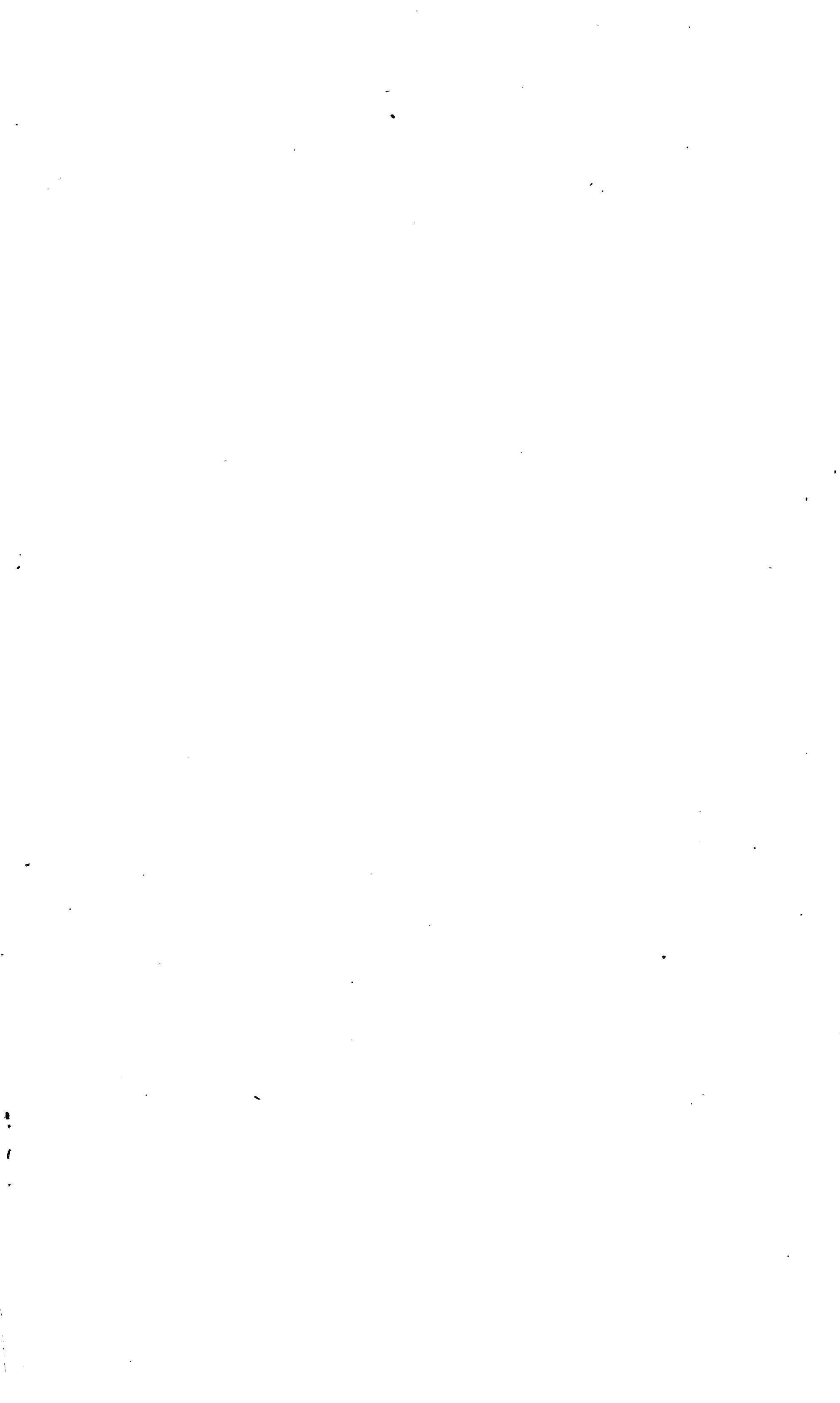
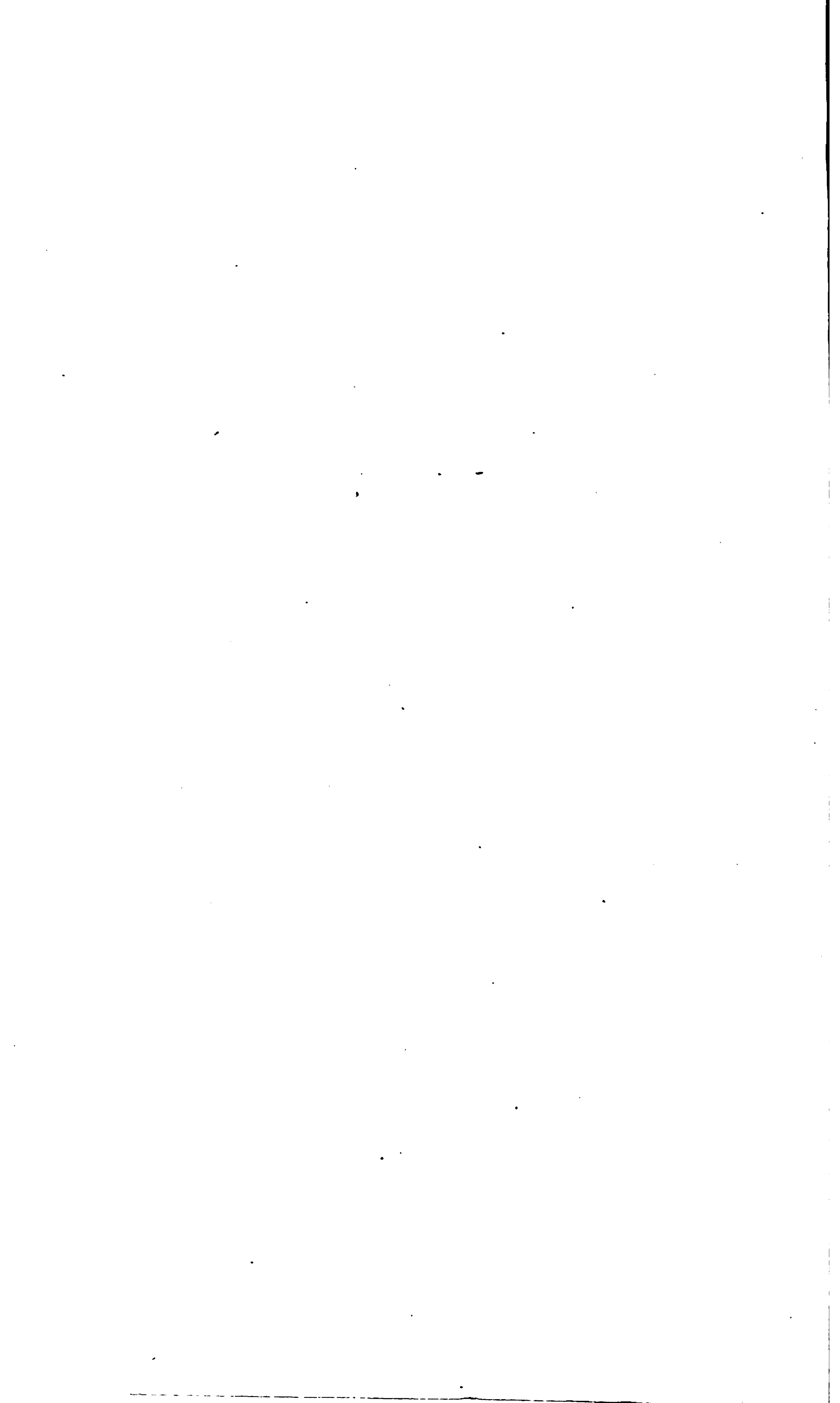
QC
191
W3
UC-NRLF
$B 270 967
YB 09714











Die
Elastizitätszahlen μ
(Verhältnis der Querkontraktion zur Längendilatation)
des
Stahls und des Flusseisens.

Inaugural-Dissertation

der

hohen philosophischen Fakultät

der

Universität Jena

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Otto Wagner.

JENA.
Druck von Bernhard Vopelius.
1903.

Genehmigt von der philosophischen Fakultät der Universität Jena auf Antrag des Herrn Professor Dr. Winkelmann.

Jena, den 31. Juli 1903.

Professor **Dr. Gutzmer,**
d. Zt. Dekan.

Inhalt.

Einleitung.

1. Durch eine Reihe von sorgfältigen Untersuchungen dürfte nachgewiesen sein, dass das Verhältnis der Querkontraktion zur Längendilatation eines isotropen Körpers nicht, wie es die ältere Molekulartheorie der Elastizität von Navier und Poisson forderte, eine von der Natur der Substanz unabhängige Konstante = 0,25, sondern eine für jeden Körper bestimmte charakteristische physikalische Grösse ist. Die Einwände, die man gegen mehrere dieser Untersuchungen machen kann, dass die Isotropie des untersuchten Materials nicht mit genügender Sicherheit nachgewiesen war, sind nicht stichhaltig gegenüber den Messungen verschiedener Beobachter, so gegenüber denen von Voigt[1]). Auch die Untersuchungen Straubels, angestellt an Schottschen Gläsern, an denen grössere Isotropiemängel nicht entdeckt werden konnten, ergaben für den Poissonschen Koeffizienten Werte zwischen 0,2 und 0,3.

Die vorliegende Untersuchung kann schon deshalb nicht zur Widerlegung der Navierschen Theorie dienen, weil die Isotropie der untersuchten Stahl- und Flusseisenstäbe gar nicht festgestellt wurde. Nach dem Herstellungsverfahren lässt sich allerdings vermuten, dass die Stäbe gröbere Isotropiemängel nicht haben, sicher aber ist es nicht. Es handelt sich hier lediglich darum, die Elastizitätszahlen des Stahls kennen zu lernen und sie mit den nach anderen Methoden gefundenen Werten zu vergleichen. Eventuell konnte sich dabei ein Zu-

[1]) W. Voigt, Wied. Ann. 15 pag. 497. 1882.

sammenhang zwischen Elastizitätszahl und der chemischen Z
sammensetzung, besonders dem Kohlenstoffgehalt des Stahls e
geben. Näher eingegangen wurde auf eine Prüfung der Methoc

2. Als Material für die Untersuchung dienten 7 Stal
und Flusseisensorten, von denen jede durch 2 Stabindividu
vertreten war. Die Stäbe waren von Fr. Krupp-Essen freun
lichst zur Verfügung gestellt. Sie waren ausgeschnitten a
dünnen Blechen. Zur Kennzeichnung der einzelnen Sorte
dienten die Bezeichnungen Krupp No. 1 .... Krupp No. 3 un
1I bis 4II, die auf den Oberflächen resp. Seitenflächen de
verschiedenen Stäbe eingeschlagen waren. Über die chemisch
Zusammensetzung und die Dimensionen der Stäbe (die beide
Individuen jeder Sorte sind bei Krupp No. 1—3 durch a und l
bei den Stäben 1—4 durch I und II unterschieden) gibt di
Tabelle Auskunft.

Tabelle 1.

Bezeichnung des Stabes	Krupp No. 1	Krupp No. 2	Krupp No. 3	1	2	3	4
Breite mm	20,00	20,1	20,0	14,12	14,10	14,11	14,13
Dicke mm	3,1	3,1	3,1	2,93	2,90	2,88	2,88
C	0,56	0,61	0,23	1,30	1,40	2,0	1,10
Si	1,65	0,25	0,11	Spur	Spur	Spur	0,053
Mn	0,63	0,410	1,67	0,37	0,50	0,48	0,17
P	0,026	0,016	0,053	0,028	0,030	0,038	0,037
S	0,013	0,026	0,034	0,030	0,029	0,038	0,008
Cu	0,04	0,04	0,248	0,063	0,056	0,135	0,060

Die Dicken der Stäbe wurden an 7 Stellen des Stabe
gemessen; die einzelnen Messungen unterschieden sich nur un
wenig 100tel mm.

Methode und Apparat.

3. Die Untersuchung schliesst sich in Methode und Apparaten ganz der von Straubel[1]) an. Das Beobachtungsverfahren

[1]) R. Straubel: Über die Elastizitätszahlen und Elastizitätsmoduln des Glases. Ann. d. Phys. N. F. 68 pag. 369. 1898.

ist das von Straubel verbesserte Cornusche. Zwischen der Oberfläche des auf einem besonders konstruierten Durchbiegungsapparat, der die gleichmässige kreisförmige Durchbiegung ermöglichen soll, und einer ebenen Deckplatte, die in einem leichten Aluminiumrahmen durch drei Schräubchen nahe an der Oberfläche des durchgebogenen Prismas gehalten wird, werden Interferenzstreifen erzeugt und aus ihrer Form der Poissonsche Koeffizient bestimmt. Ist die Ebene der Deckplatte der Tangentialebene an den Mittelpunkt der entstandenen Sattelfläche parallel, so sind bei senkrecht auffallendem Lichte die Kurven gleichen Gangunterschiedes, die Interferenzstreifen, Hyperbeln, die symmetrisch parallel und senkrecht zur Biegungsebene liegen. Nennt man den Asymptotenwinkel der Hyperbelschar, dessen Winkelhalbierende eine Gerade der zur Biegungsebene senkrechten Ebene ist, $2a$, so ist $\mu = tg^2 a$.

4. Inbetreff der Einzelheiten in der Konstruktion des Interferenz- und Durchbiegungsapparates, der genauen Einstellung des Interferenzapparates gegen den Durchbiegungsapparat, der exakten Justierung des Interferenzbildes usw., sowie der Einzelheiten des Beobachtungsverfahrens kann ich auf die Abhandlung von Straubel verweisen. Denn Apparate und Anordnung derselben sind dieselben geblieben. Nur an dem Interferenzapparate wurde bei den späteren Messungen eine kleine Änderung angebracht. Es zeigte sich nämlich, dass nach längerem Gebrauche der Wasserstoffröhren die Vorschaltung eines roten Rubinglases zur Erreichung monochromatischer Beleuchtung nicht mehr genügte. Deshalb wurden in den Lichtkegel hinter der Linse nach der Wasserstoffröhre ein geradsichtiges Prisma mit grösserer Dispersion und zwei durch eine Drehvorrichtung gegeneinander bewegliche Glaskeile eingeschaltet. Durch Drehen dieser Vorrichtung wurde der Winkel, den die Keilflächen miteinander bildeten, geändert, der Lichtkegel also abgelenkt. Auf diese Weise konnten die einzelnen Linien des Wasserstoffspektrums gut getrennt und

zur Beleuchtung durch einfaches Drehen nacheinander benutzt werden. Selbst bei langem Gebrauch der Wasserstoffröhren war die Einfarbigkeit noch genügend.

5. Während Straubel das Interferenzbild bei einer Anzahl von Beobachtungsreihen photographierte und an den Photogrammen die Durchbiegung und den zugehörigen Asymptotenwinkel unter dem Mikroskop bestimmte, führte ich diese Messungen durchgehend direkt aus. Mit Hilfe einer an dem Doveschen Prisma angebrachten Gradteilung und festem Nonius wurde der Asymptotenwinkel durch acht Einstellungen, entsprechend einer vollen Drehung des Doveschen Prismas, ermittelt. Die Einstellung auf die Richtung der Asymptoten erfolgte stets bei dem Grenzfall, in dem eine Hyperbel in zwei sich schneidende Gerade zerfallen war, da dann die Genauigkeit der Einstellung am größten war. Nicht immer gelang es, während der Drehung des Doveschen Prismas den Mittelpunkt der Interferenzerscheinung fortwährend in Deckung zu halten mit dem Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohrs. In diesem Falle wurde der Faden der Asymptotenrichtung parallel gestellt. Da die Verschiebungen der Mittelpunkte des Interferenzbildes und des Fadenkreuzes während der Drehung des Doveschen Prismas nicht beträchtlich waren, konnten Fehler, die dadurch in der Winkelbestimmung gemacht wurden, vernachlässigt werden gegen die Beobachtungsfehler.

Die Durchbiegung wurde ebenfalls direkt gemessen durch die Anzahl n der Hyperbelstreifen auf der in der Biegungsebene liegenden Strecke $a = 0{,}6$ cm, gemessen vom Mittelpunkt der Interferenzerscheinung an. Das Zählen der Streifen erfolgte, um Asymmetrieen in der Lage der Hyperbeln zu eliminieren, auf beiden Seiten und vor und nach einer Winkelmessung.

Genauigkeit der Beobachtungen.

6. Die Methode erfordert eine grosse Genauigkeit in der Bestimmung des Asymptotenwinkels und der Durchbiegung. Da der Asymptotenwinkel durch Einstellung des Fernrohr-

fadens auf die Asymptotenrichtung bestimmt wurde, so ist ohne weiteres klar, dass die Messungen um so genauer wurden, je länger die Hyperbeläste und je mehr Hyperbeln überhaupt vorhanden waren. Nun waren aber bei den schmalen Stäben natürlich die Hyperbeläste sehr kurz. Ausserdem waren bei Anwendung des roten Wasserstofflichtes nur wenig Hyperbeln (bei schwacher Durchbiegung nur 1—2 in der Querrichtung des Stabes)[1] vorhanden. Um also einigermassen brauchbare Messungen des Asymptotenwinkels auszuführen, musste entweder Licht kürzerer Wellenlänge angewandt, oder aber erst bei höheren Durchbiegungen beobachtet werden. Nun wird zwar bei Anwendung des blauen Wasserstofflichtes die Zahl der Streifen im Verhältnis 1,4 vergrössert; andererseits aber war die Helligkeit des blauen Lichtes viel geringer als die des roten. Dieser Umstand und die Tatsache, dass das blaue Licht das Auge viel mehr anstrengte und ermüdete als das rote, bewirkten, dass trotz der Vermehrung der Streifen die Genauigkeit der Bestimmungen des Asymptotenwinkels durch die Anwendung dieses blauen Lichtes nicht gesteigert, sondern herabgedrückt wurde. Die Messungen erfolgten daher durchgängig bei rotem Lichte (H_α); um den Asymptotenwinkel α genügend genau bestimmen zu können, konnten sie bei den schmalen Stäben erst bei verhältnismässig hohen Durchbiegungen beginnen.

7. Leider aber hatte die Anwendung grösserer Durchbiegungen abgesehen davon, dass sie vielleicht theoretisch bedenklich ist, einen weiteren Übelstand im Gefolge. Er äusserte sich dadurch, dass während der Dauer einer Winkelmessung, also bei vollständiger Ruhe der Belastungsschraube, das Interferenzbild in stetigem Fluss sich befand. Dieses Fliessen des Bildes, das Wandern der Interferenzstreifen, ging auch bei kleinen Durchbiegungen, aber bedeutend langsamer wie bei hohen, vor sich. Von Einfluss auf diese Nachwirkungserscheinungen — um solche handelt es sich offenbar — war

[1]) Vgl. Photogramme pag. 32.

auch die Geschwindigkeit, mit der der Stab belastet wurde. Je schneller man belastete, desto schneller wanderten auch die Hyperbeln. Quantitativ läßt sich über die Geschwindigkeit der Wanderung als Funktion der Belastungsgeschwindigkeit, der Durchbiegung, der Zahl der Durchbiegungen in der Zeiteinheit nichts sagen, da eine Messung wegen der Unvollkommenheit des Belastungsapparates ausgeschlossen war. Da die Belastung ja durch eine Schraube geschah, verging natürlich bis zur vollen Wirkung einer Belastung mehr oder weniger Zeit [1]). Ein Apparat, der eine Belastung mit Gewichten und eine Variation der Belastungsgeschwindigkeit gestattet hätte, wurde nicht angewandt, da es ja hier nur darauf ankam, diese störenden Erscheinungen zu beseitigen.

Da bei allen Beobachtungen zur Ermöglichung ungestörter Ausbildung der Querkontraktion zwischen die Stäbe und die Schneiden des Durchbiegungsapparates dünne Gummischeibchen gelegt wurden, glaubte ich erst, dass diese hauptsächlich schuld an den Nachwirkungserscheinungen wären. Doch zeigten Versuche, angestellt mit verschiedenen Stahl- und Glasstäben, dass bei Anwendung einer bestimmten Sorte von dünnem Gummi, die später immer benutzt wurde, sie bei einigen Gläsern ganz ausblieben, während sie bei den Stahlstäben sich noch mehr oder weniger geltend machten. Damit war gezeigt, dass die Nachwirkungen nicht vom Gummi, sondern von den Stäben selbst herrührten.

Bei einigen Stäben waren die Nachwirkungserscheinungen so stark, dass selbst mehrere Stunden nach der Belastung deutlich das Fliessen des Bildes beobachtet werden konnte. Unmittelbar nach dem Belasten war wegen der enormen Geschwindigkeit der Streifenwanderung an eine Winkelmessung und Bestimmung der Durchbiegung überhaupt nicht zu denken; der Grenzfall, dass eine Hyperbel in ein Geradenpaar zerfiel, blieb nur Bruchteile von Sekunden erhalten.

---

[1]) Mindestens 1 Sekunde, gewöhnlich aber über 3 Sekunden.

In diesem Falle verfuhr ich so: Ich ging etwas über die Belastung hinaus, bei der ich den Asymptotenwinkel bestimmen wollte, wartete einige Zeit und ging dann durch Nachlassen der Schraube etwas mit der Belastung zurück. Dann blieb die Interferenzerscheinung einige Zeit in Ruhe, sodass man den Asymptotenwinkel, indem man kleinere Fehler durch Nachkorrigieren mit der Belastungsschraube beseitigte, ohne grössere Schwierigkeiten bestimmen konnte.

8. Ein weiterer Umstand, der eine genaue Messung des Asymptotenwinkels erschwerte, lag darin begründet, dass einige der Stahlstäbe im Verhältnis zur Deckplatte zu stark reflektierten. Die Folge davon war, dass im Interferenzbild die Kontraste zwischen hellen und dunkeln Streifen nicht besonders ausgeprägt waren. Diese übermässige Politur, die übrigens beim Schleifen des Stahls sehr leicht erhalten wird, wurde durch Bestreichen der Stäbe mit der mit ein wenig Fett eingeriebenen Handfläche beseitigt.

9. Natürlich ergaben sich auch nach Beseitigung dieser störenden Momente noch immer kleinere Differenzen in den mittleren Fehlern des Asymptotenwinkels.

Je länger die Hyperbeln waren und je mehr Hyperbeln das Interferenzbild aufwies, desto genauer wurden natürlich die Winkelmessungen. Daher ist auch bei höheren Durchbiegungen die Winkelbestimmung genauer. Eine Bestimmung der quantitativen Abhängigkeit der Genauigkeit von der Durchbiegung ist jedoch nicht möglich, da zu viel Momente, Grösse des Winkels, Stabbreite, Oberflächenbeschaffenheit, dabei mitsprechen. Kleine Fehler der Oberflächenbeschaffenheit eines Stabes vermindern die Genauigkeit der Winkelbestimmung. Nach meinen Beobachtungen bleibt der mittlere Fehler einer Winkelbestimmung immer unter 0,08°, bei den späteren Messungen unter 0,05°. Je nach der mittleren Grösse von a entspricht dies bei der Bestimmung von $\mu_n = tg^2 a_n$ einem mittleren Fehler von 0,0009—0,0024.

10. Bei der Bestimmung der Durchbiegung musste darauf geachtet werden, dass die symmetrische Lage der Hyperbeln wirklich oder wenigstens annähernd vorhanden war. Stäbe, bei denen das Interferenzbild grobe Abweichungen aufwies, dass nämlich auf einer Strecke von 0,4 cm auf beiden Seiten des Interferenzbildes gleich viel, auf 0,6 cm aber verschieden viel Hyperbeln lagen, konnten zur Messung nicht benutzt werden[1]. Solche Stäbe wurden von neuem geschliffen. Kleineren Asymmetrieen wurde, wie schon gesagt, durch Bildung des arithmetischen Mittels aus den Werten der Streifen auf beiden Seiten Rechnung getragen. Einige Stäbe zeigten eine schiefe Lage der Hauptkrümmungsebenen gegenüber der Biegungsebene. Da diese schiefe Lage bei höheren Durchbiegungen nicht mehr so stark war, so wurden die Beobachtungsreihen bei diesen Stäben erst mit höheren Durchbiegungen begonnen; bei nur schwach schiefer Lage wurden Mittelwerte gebildet.

Alles in allem war die Bestimmung der Zahl der Hyperbelstreifen n (die ein Mass der Durchbiegung darstellt) genau bis auf ungefähr $^1/_3$ der Streifenbreite. Bei niedrigen Durchbiegungen konnten 10tel bequem geschätzt werden; bei höheren (über 12) dagegen sind fehlerhafte Bestimmungen der Durchbiegung von 0,3—0,5 Streifenbreite nicht ausgeschlossen.

11. Von einer Prüfung des Einflusses des Schneidenabstandes auf das Resultat wurde ganz abgesehen, da er, wie Straubel zeigte, von untergeordneter Bedeutung ist, wenn nur die inneren Schneiden genügend weit von der Mitte des Stabes, wo die Messungen ausgeführt werden, entfernt sind. Ich benutzte durchgänigig den grössten von Straubel angewandten Schneidenabstand von aussen 10 cm und innen 7 cm.

Die Resultate der Beobachtungsreihen.

12. Die Messungen geschahen in der Weise, dass zu jeder Durchbiegung (Zahl [n] der Hyperbeln auf einer Strecke von

---

[1]) Vergleiche Photogr. Krupp No. 3^b pag. 32.

$a = 0{,}6$ cm) die zugehörigen Werte des Asymptotenwinkels α bestimmt wurden. Es wurden dabei die Beobachtungen Straubels, dass α durchweg sich monoton mit der Durchbiegung ändert, bestätigt. Die Grösse dieser Änderung war sehr verschieden. Auch scheint sie nicht ganz so regelmässig zu verlaufen, wie es nach der von Straubel aufgestellten Formel sein müsste. Straubel zeigte, dass die Annahme von Anfangskrümmungen der Oberfläche der Stäbe eine Änderung des Asymptotenwinkels erklärt. Unter der Voraussetzung, dass die Hauptkrümmungsebenen des unbelasteten Stabes parallel und senkrecht zur Biegungsebene liegen, oder wenn diese Bedingung annähernd erfüllt ist, verläuft die Änderung von $\mu_n = tg^2 \alpha_n$ nach der Formel:

$$\mu_n = \mu + \frac{\nu}{n}$$

Es bedeutet:

μ = Poissonscher Koeffizient,

$\nu = -\frac{\varrho'' + \varrho' \mu}{\lambda} a^2$ abhängig nur von den Anfangskrümmungen ϱ'' und ϱ' senkrecht und in der Biegungsebene, a und λ,

n = Zahl der Streifen auf der Strecke a,

a = Strecke, auf der die Streifen gezählt werden,

λ = Wellenlänge des zur Beleuchtung dienenden Lichtes.

μ_n würden also hyperbolisch mit n verlaufen. Die Methode der kleinsten Quadrate ergibt daraus für den Poissonschen Koeffizienten den Wert:

$$\mu = \bar{\mu} + \frac{\Sigma \frac{1}{n} \Sigma n \Lambda_n}{\Sigma \frac{1}{n} \Sigma n - (\Sigma 1)^2}$$

Es bedeuten:

$\bar{\mu}$ = Mittelwert der μ_n einer Beobachtungsreihe $= \frac{\Sigma \mu_n}{\Sigma 1}$,

Σn = Summe der n-Werte einer Beobachtungsreihe (n = Zahl der Streifen auf der Strecke $a = 0{,}6$ cm),

$\Sigma\frac{1}{n}$ = Summe der reciprok. Werte der n einer Beobachtungsreihe,

$\Sigma 1$ = Anzahl der Beobachtungen einer Reihe.

$\Delta_n = \mu_n - \overline{\mu}$.

Nach obiger Formel wurden sämtliche Beobachtungsreihen ausgerechnet.

Die ersten Messungen wurden angestellt an den Stäben 1 I, 2 I, 3 I. Die Resultate sind in der Tabelle angegeben. Es bedeutet:

m = Anzahl von Beobachtungen einer Reihe,

n_1, n_m = Durchbiegungen zu Beginn und Schluss einer Reihe,

a_1, a_m = Asymptotenwinkel zu Beginn und Schluss einer Reihe,

μ = Poissonscher Koeffizient,

$\frac{a_1 - a_m}{n_1 - n_m}$ = mittlere Zunahme von a, abgesehen vom Vorzeichen.

Tabelle 2.

Bezeichnung	m	$n_1 \ldots n_m$	$a_1 \ldots a_m$	μ	Abw. v. Mittel d. μ ca.	$\frac{a_1 - a_m}{n_1 - n_m}$
	6	9,9 . . . 14,8	23°,03 . . . 24°,64	0,271	0,1 %	0°,33
	5	9,3 . . . 14,7	22°,85 . . . 24°,84	277	2,1 %	37
1 I.	6	10,8 . . . 14,3	23°,75 . . . 24°,56	260	4,2 %	28
	6	10,9 . . . 14,2	23°,43 . . . 24°,50	272	0,2 %	34
	6	9,3 . . . 14,6	22°,29 . . . 24°,51	277	2,1 %	42
				Mittel = 0,271		
	5	10,7 . . . 14,9	22°,91 . . . 24°,86	0,308	7,7 %	0,46
	5	15,0 . . . 10,8	24°,88 . . . 23°,17	298	4,2 %	41
	5	9,3 . . . 13,7	22°,40 . . . 24°,78	310	8,4 %	54
	5	9,6 . . . 14,7	23°,05 . . . 24°,95	284	0,7 %	37
	5	16,3 . . . 9,8	25°,45 . . . 23°,88	280	2,1 %	24
2 I.	5	11,8 . . . 15,3	23,°24 . . . 24°,68	311	8,7 %	41
	6	9,4 . . . 14,4	22°,76 . . . 24°,30	259	9,4 %	31
	5	9,6 . . . 14,6	23°,36 . . . 24°,65	257	10,1 %	26
	6	8,4 . . . 13,0	21°,76 . . . 24°,46	291	1,7 %	59
	5	9,7 . . . 13,9	22°,90 . . . 24°,49	272	5 %	38
	5	9,2 . . . 13,9	22°,73 . . . 24°,69	277	3,2 %	44
				Mittel = 0,286		

Bezeichnung	m	$n_1 \dots n_m$	$a_1 \dots a_m$	μ	Abw. v. Mittel d. μ ca.	$\frac{a_1 - a_m}{n_1 - n_m}$
	5	9,3 . . . 14,6	22°,80 . . . 24°,84	0,276	0,0 %	0,40
	5	8,7 . . . 14,2	22°,75 . . . 24°,91	282	2,2 %	40
	7	7,9 . . . 13,9	22°,86 . . . 24°,99	270	2,2 %	35
	5	9,8 . . . 12,7	23°,85 . . . 24°,71	268	2,9 %	30
	5	9,3 . . . 12,8	23°,48 . . . 24°,91	289	5 %	41
	5	9,3 . . . 13,8	23°,50 . . . 25°,05	281	1,8 %	37
	5	9,4 . . . 13,8	23°,61 . . . 24°,90	267	3,3 %	27
	5	14,0 . . . 9,8	24°,96 . . . 23°,75	266	3,6 %	29
31.	5	9,3 . . . 13,8	23°,36 . . . 24°,80	267	3,3 %	32
	5	9,6 . . . 14,7	23°,45 . . . 25°,10	275	0,4 %	32
	5	9,3 . . . 13,4	23°,44 . . . 24°,91	281	1,8 %	36
	5	9,9 . . . 13,6	23°,55 . . . 24°,90	281	1,8 %	36
	5	9,1 . . . 13,6	23°,34 . . . 24°,91	276	0,0 %	35
	5	9,4 . . . 13,3	23°,35 . . . 24°,94	289	5 %	40
	5	9,2 . . . 13,7	23°,25 . . . 25°,09	291	5,4 %	41
	5	9,7 . . . 13,8	23°,65 . . . 25°,00	275	0,4 %	33
	5	8,3 . . . 12,4	22°,75 . . . 24°,35	261	4 %	39
				Mittel = 0,276		

Ein Blick auf diese Tabelle zeigt uns, daß wir hier ganz enorme Unterschiede der Werte des Poissonschen Koeffizienten haben: Während bei den Straubelschen Werten nur bei dem Glase 1991 Differenzen vom Mittelwerte von etwas über 3 % vorkommen, haben wir hier Abweichungen bis zu 4, 6 und bei 2I gar bis zu 10 %.

13. Nun sind schon in den einzelnen Beobachtungsreihen ziemlich grosse Differenzen vorhanden, die wohl teilweise die in den μ-Werten erklären. Ich glaubte zunächst, dass diese Verschiedenheiten der Beobachtungsreihen begründet wären in verschiedenen Zuständen, in denen sich der Stab während der verschiedenen Beobachtungsreihen befunden hätte. Für den Elastizitätsmodul ist ja jenes eigentümliche Verhalten beobachtet worden, dass die Werte desselben im sogenannten Akkommodationszustand sich unterscheiden von denen im Normalzustande[1]). Nun kann ein Stab ziemlich leicht von

[1]) E. Wandersleb: Über die anomale Änderung des longitudinalen Elastizitätsmoduls einiger Gläser mit der Temperatur usw. Inaug.-Diss., Jena 1901.

einem Zustand in den andern übergeführt werden. Erwärmen versetzt zum Beispiel einen Stab sehr leicht in den Akkommodationszustand. Während er dann, solange er auf den Schneiden liegen blieb, in diesem verharrte, genügte blosses Herunterheben von den Schneiden oder auch Durchschwingen mit Stimmgabeln oder Klopfen, ihn wieder in den Normalzustand zu bringen. Da nun bei meinen Beobachtungen die einzelnen Stäbe teils auf den Schneiden geblieben waren, teils neu aufgelegt wurden, so kam die obige Möglichkeit der Erklärung in Betracht. Die Versuche, die in dieser Richtung angestellt wurden, lieferten jedoch alle ein negatives Resultat. Ob ein Stab auf den Schneiden liegen blieb oder zwischen den einzelnen Beobachtungsreihen heruntergenommen und mit einer Stimmgabel kräftig durchgeschwungen wurde, die Resultate μ blieben verschieden; eine Regelmässigkeit derselben konnte nicht konstatiert werden.

14. Nun treten auch bei Straubel zwischen den einzelnen Beobachtungsreihen Differenzen auf, die allerdings nicht so bedeutend sind wie z. B. bei dem Stabe 2I. Vergleichen wir diese Reihen näher mit einander, so fällt sofort auf, dass sich nach den Beobachtungen Straubels a, also auch μ_n viel weniger stark mit der Durchbiegung ändert als bei meinen. Um eine angenäherte Vergleichung zu ermöglichen, betrachten wir die durchschnittliche mittlere Änderung des Asymptotenwinkels a mit der Durchbiegung n, nämlich den Ausdruck $\frac{a_1 - a_m}{n_1 - n_m}$; auf das Vorzeichen kommt es nicht an. Bei Straubel ist dieser Ausdruck mit wenigen Ausnahmen kleiner als bei mir, durchschnittlich $= 0{,}2^0$. Bei den Stäben 1I, 2I, 3I dagegen haben wir durchschnittliche Zunahmen von $0^0{,}34$, $0^0{,}40$ und $0^0{,}35$. Es ist ersichtlich, dass bei nur kleiner mittlerer Änderung des Asymptotenwinkels das Glied $\Sigma n \Delta_n$ kleiner wird als bei grosser, dass also, falls die Mittelwerte $\overline{\mu}$ der einzelnen Beobachtungsreihen gut übereinstimmen, auch die μ-Werte sich nur wenig unterscheiden werden.

Es kam also jetzt darauf an, Stäbe mit kleiner Änderung des Asymptotenwinkels beobachten zu können. Die Änderung von μ_n verläuft nun gemäss der Formel:

$$\mu_n = \mu + \frac{\nu}{n} = \mu - \frac{\varrho'' + \varrho'\mu}{\lambda n} a^2$$

Danach wird $\mu_n = \mu = \text{const.}$, wenn $\varrho'' + \varrho'\mu = 0$, also $-\frac{\varrho''}{\varrho'} = \mu$ ist, oder wenn ϱ'' und ϱ' gleichzeitig $= 0$ sind.

Die erste Bedingung $-\frac{\varrho''}{\varrho'} = \mu$ wird sich nur schwer erfüllen lassen; ist sie zufällig erfüllt, d. h. ändert sich bei vorhandener Anfangskrümmung a nicht, so ist μ gleich dem Verhältnis der Anfangskrümmungen senkrecht und in der Biegungsebene. Die zweite Bedingung $\varrho'' = 0$, $\varrho' = 0$ dagegen sagt aus: μ_n ändert sich nicht mit der Durchbiegung, wenn die Oberfläche des Stabes eben ist.

Es kam also darauf an, eine möglichst ebene Fläche an die Stäbe anzuschleifen. Bisher zeigten alle Stäbe eine mehr oder weniger starke Anfangskrümmung, denn die Interferenzstreifen waren selbst bei gänzlich unbelastetem Stabe nicht Gerade, wie sie es bei einer ebenen Oberfläche hätten sein müssen, sondern mehr oder weniger regelmässige Kurven von annähernd hyperbolischer und elliptischer Gestalt. Die Oberflächen waren also teilweise schon sattelförmig oder konvex oder konkav.

15. Um also diese Anfangskrümmungen zu beseitigen, wurden die Stäbe 1—4 einem sorgfältigen Schleif- und Polierprozess unterworfen. Leider war das Resultat desselben nicht ganz den Wünschen entsprechend, denn alle Stäbe zeigten noch das Vorhandensein der Anfangskrümmung, wenn auch nicht mehr in so starkem Masse wie früher. Es scheint also recht schwer zu sein, an so lange und verhältnismässig schmale und dünne Stäbe ebene Flächen anzuschleifen. Wir kommen zu den Untersuchungen der Stäbe Krupp No. 1—3.

Interessant war besonders der Stab Krupp No. 1[a], da sich bei ihm eine unzweifelhafte Zu- resp. Abnahme des Asymptotenwinkels nicht konstatieren liess. Der mittlere Fehler einer Winkelmessung war hier wegen der Länge der Hyperbeläste[1]) ziemlich klein, er betrug höchstens $0^0,03$. Für verschiedene Durchbiegungen wurde nun an verschiedenen Tagen und bei verschiedenen Belastungsverhältnissen die zugehörigen Asymptotenwinkel bestimmt, die fast bis auf den mittleren Fehler der einzelnen Messungen übereinstimmen. Es wurde beobachtet

für $n =$	$a =$	$n =$	$a =$
7,0	$26^0,96$	4,3	26,95
8,0	$27^0,03$	5,2	26,95
9,1	$27^0,05$	6,2	26,95
10,6	$27^0,00$	7,0	27,00
13,0	$27^0,05$	7,8	27,00
		10,0	27,00
4,8	$26^0,94$	12,0	27,00
13,0	$27^0,00$		

Die Differenzen der Winkel sind sehr klein, doch scheint ein Wachsen desselben mit der Durchbiegung stattzufinden. Es käme also hier noch zu dem Mittelwerte der μ_n (0,260) eine kleine Korrektion, sodass der Wert des Poissonschen Verhältnisses für diesen Stab etwas über 0,260 beträgt.

Der Stab Krupp No. 1[a] entsprach also am besten der oben aufgestellten Forderung, dass a sich möglichst wenig mit der Durchbiegung ändern soll. Nun waren in der Tat die Interferenzkurven bei unbelastetem Stabe nur wenig von Geraden verschieden, die Oberfläche also nahezu eine Ebene. Es beweist dieser Umstand, dass tatsächlich die Anfangskrümmung die Änderung des Asymptotenwinkels bewirkt.

Die Stäbe Krupp No. 1^b—3^b und die neu geschliffenen 1I—4II hatten dagegen alle Anfangskrümmung, sodass also a sich änderte. Die Beobachtungsreihen und die Resultate folgen in der Tabelle; die Stäbe Krupp No. 1^b—3^b hatten eine Breite von ungefähr 20 mm, eine Dicke von 3 mm. Die Stäbe 1I—4II waren schmäler, nur 14 mm breit und 2,9 mm dick.

---

1) Krupp No. 1[a] war ca. 2 cm breit.

Tabelle 3.

Bezeichnung	m	$n_1 \ldots n_m$	$a_1 \ldots a_m$	μ	Abw. v. Mittel d. μ ca.	$\frac{a_1 - a_m}{n_1 - n_m}$
Krupp No. 1 b	5	7,0 . . . 12,3	21°,34 . . . 24°,18	0,263	4 %	0°,54
	5	6,7 . . . 11,0	20°,70 . . . 23°,80	274	0,1 %	72
	5	6,9 . . . 11,1	21°,00 . . . 24°,00	280	2 %	71
	5	6,5 . . . 11,3	20°,65 . . . 24°,05	276	0,6 %	71
	5	12,1 . . . 6,4	24°,31 . . . 20°,56	279	1,7 %	65
			Mittel =	0,274		
Krupp No. 2 a	5	5,7 . . . 11,5	24°,34 . . . 26°,29	0,279	0,5 %	0°,30
	5	11,6 . . . 6,2	26°,42 . . . 24°,98	282	0,5 %	27
	5	6,4 . . . 11,1	24°,65 . . . 26°,30	286	2 %	35
	5	5,2 . . . 11,6	24°,55 . . . 26°,38	275	2 %	29
			Mittel =	0,281		
Krupp No. 2 b	5	6,6 . . . 13,7	28°,89 . . . 28°,36	0,279	0,1 %	0°,09
	5	15,0 . . . 6,2	28°,34 . . . 29°,16	278	0,3 %	09
	5	13,7 . . . 6,7	28°,49 . . . 29°,29	279	0,1 %	11
			Mittel =	0,279		
Krupp No. 3 a	5	14,4 . . . 6,7	27°,84 . . . 28°,11	0,274	3 %	0°,05
	6	4,3 . . . 11,0	28°,28 . . . 27°,91	272	2 %	05
	5	12,9 . . . 7,0	27°,70 . . . 28°,30	260	2 %	12
	5	13,5 . . . 7,0	27°,74 . . . 28°,26	264	0,9 %	08
	5	16,1 . . . 7,7	27°,60 . . . 28°,23	261	2 %	08
	5	15,3 . . . 7,9	27°,68 . . . 28°,14	265	0,4 %	06
			Mittel =	0,266		
Krupp No. 3 b	5	5,7 . . . 13,0	30°,74 . . . 28°,85	0,265	1,4 %	0°,26
	5	4,8 . . . 9,3	31°,40 . . . 29°,53	265	1,4 %	42
	6	12,1 . . . 4,3	29°,09 . . . 31°,74	271	0,9 %	34
	6	4,4 . . . 12,2	31°,45 . . . 29°,00	273	1,8 %	31
	5	5,4 . . . 12,0	30°,68 . . . 29°,00	271	0,9 %	25
	5	6,2 . . . 11,7	30°,39 . . . 29°,03	267	0,7 %	25
			Mittel =	0,269		
11	5	14,0 . . . 8,6	28°,34 . . . 29°,18	0,258	0,2 %	0°,16
	5	14,2 . . . 7,9	28°,29 . . . 29°,30	259	0,2 %	16
	5	13,3 . . . 8,3	28°,25 . . . 29°,03	257	0,6 %	16
	5	14,0 . . . 7,5	28°,35 . . . 29°,31	265	2,6 %	15
	5	13,2 . . . 8,5	28°,29 . . . 29°,01	260	0,6 %	16
	5	14,2 . . . 9,4	28°,21 . . . 28°,90	252	2,6 %	14
			Mittel =	0,259		

Bezeichnung	m	$n_1 \dots n_m$	$\alpha_1 \dots \alpha_m$	μ	Abw. v. Mittel d. μ ca.	$\frac{\alpha_1 - \alpha_m}{n_1 - n_m}$
	5	13,9 . . . 6,9	28⁰,38 . . . 29⁰,56	0,264	0,5 %	0⁰,17
	5	16,1 . . . 8,4	28⁰,29 . . . 29⁰,24	264	0,5 %	13
	5	7,6 . . . 13,1	29⁰,45 . . . 28⁰,49	266	1,4 %	18
	5	14,7 . . . 7,5	28⁰,40 . . . 29⁰,31	267	1,7 %	13
1 II	5	13,7 . . . 8,8	28⁰,15 . . . 28⁰,98	250	4,8 %	17
	5	7,7 . . . 12,7	29⁰,24 . . . 28⁰,38	261	0,6 %	17
	5	14,8 . . . 9,0	28⁰,30 . . . 29⁰,14	260	1,0 %	15
	5	13,7 . . . 8,3	28⁰,41 . . . 29⁰,24	262	0,2 %	15
	5	6,8 . . . 12,0	29⁰,46 . . . 28⁰,60	269	2,4 %	17
			Mittel =	0,263		
	5	13,3 . . . 7,8	28⁰,24 . . . 29⁰,01	0,265	1,6 %	0⁰,14
	5	13,1 . . . 8,0	28⁰,25 . . . 29⁰,00	262	0,6 %	15
	5	13,7 . . . 9,0	28⁰,31 . . . 28⁰,95	260	0,1 %	14
	5	13,7 . . . 8,7	28⁰,30 . . . 29⁰,02	261	0,2 %	14
2 I	5	13,5 . . . 8,8	28⁰,34 . . . 29⁰,01	259	0,5 %	14
	5	8,6 . . . 13,6	29⁰,07 . . . 28⁰,30	258	0,9 %	13
	5	14,0 . . . 9,0	28⁰,33 . . . 29⁰,03	259	0,5 %	14
	5	13,8 . . . 8,8	28⁰,35 . . . 29⁰,06	261	0,2 %	14
	5	13,7 . . . 8,8	28⁰,34 . . . 29⁰,06	259	0,5 %	15
			Mittel =	0,260		
	5	13,8 . . . 8,7	28⁰,00 . . . 28⁰,47	0,261	1,2 %	0⁰,09
	5	7,5 . . . 12,5	28⁰,36 . . . 27⁰,83	262	1,6 %	09
	5	14,0 . . . 8,6	28⁰,00 . . . 28⁰,46	267	3,5 %	09
	5	12,4 . . . 8,0	28⁰,00 . . . 28⁰,65	255	1,2 %	15
2 II	5	13,1 . . . 8,5	28⁰,00 . . . 28⁰,61	258	0,0 %	13
	5	13,1 . . . 8,9	28⁰,05 . . . 28⁰,61	254	1,6 %	13
	5	13,7 . . . 8,4	27⁰,89 . . . 28⁰,55	258	0,0 %	12
	5	13,8 . . . 8,7	27⁰,91 . . . 28⁰,55	254	1,6 %	12
	5	13,8 . . . 8,6	27⁰,90 . . . 28⁰,53	254	1,6 %	12
			Mittel =	0,258		
	5	6,6 . . . 12,1	29⁰,10 . . . 28⁰,25	0,263	0,0 %	0⁰,15
	5	5,9 . . . 14,2	29⁰,23 . . . 28⁰,00	261	0,8 %	15
	5	6,3 . . . 13,2	29⁰,34 . . . 28⁰,09	256	2,7 %	18
	5	6,5 . . . 16,4	29⁰,34 . . . 27⁰,90	257	2,3 %	15
3 I	5	5,0 . . . 13,9	29⁰,56 . . . 28⁰,19	269	2,3 %	15
	5	13,6 . . . 7,6	28⁰,09 . . . 28⁰,85	262	0,4 %	13
	5	13,3 . . . 8,3	28⁰,11 . . . 28⁰,74	261	0,8 %	15
	5	13,8 . . . 8,4	28⁰,13 . . . 28⁰,79	261	0,8 %	13
	5	14,2 . . . 8,8	28⁰,20 . . . 28⁰,73	264	0,4 %	10

Bezeichnung	m	$n_1 \dots n_m$	$\alpha_1 \dots \alpha_m$	μ	Abw. v. Mittel d. μ ca.	Änder. von α
	5	14,2 ... 9,0	28°,20 ... 28°,89	0,269	2,3 %	0°,13
3 I	5	13,7 ... 8,0	28°,41 ... 29°,09	267	1,5 %	12
	5	13,0 ... 8,0	28°,39 ... 29°,09	265	0,8 %	14
			Mittel =	0,263		
	5	13,7 ... 8,0	28°,10 ... 28°,76	0,263	1,9 %	0°,12
	5	14,0 ... 8,7	28°,00 ... 28°,69	255	1,2 %	13
	5	13,8 ... 8,8	28°,04 ... 28°,70	256	0,8 %	13
	5	14,3 ... 9,1	28°,19 ... 29°,01	254	1,5 %	16
3 II	5	13,4 ... 8,0	28°,16 ... 29°,14	252	2,3 %	18
	5	13,3 ... 8,9	28°,31 ... 28°,90	259	0,4 %	14
	5	13,9 ... 8,8	28°,31 ... 28°,93	263	1,9 %	12
	5	13,4 ... 8,5	28°,34 ... 28°,99	262	1,5 %	13
	5	13,8 ... 8,7	28°,23 ... 28°,93	261	1,2 %	14
			Mittel =	0,258		
	5	13,5 ... 8,8	27°,56 ... 28°,19	0,244	0,8 %	0°,13
	5	14,5 ... 8,8	27°,35 ... 28°,15	242	0,0 %	14
	5	13,1 ... 8,6	27°,38 ... 28°,11	236	2,5 %	16
	5	13,6 ... 8,5	27°,50 ... 28°,15	246	1,7 %	13
4 I	5	12,9 ... 8,0	27°,60 ... 28°,34	246	1,7 %	15
	5	14,8 ... 9,0	27°,29 ... 28°,16	233	4,0 %	15
	5	12,9 ... 8,0	27°,52 ... 28°,27	242	0,0 %	15
	5	12,9 ... 7,9	27°,54 ... 28°,29	243	0,4 %	15
	5	13,7 ... 7,9	27°,48 ... 28°,30	244	0,8 %	14
			Mittel =	0,242		
	5	13,8 ... 8,1	26°,70 ... 27°,10	0,239	3,5 %	0°,07
	5	13,3 ... 7,9	26°,20 ... 26°,84	219	5,2 %	12
4 II	5	14,7 ... 9,1	26°,60 ... 27°,11	234	1,3 %	09
	5	13,4 ... 8,0	26°,66 ... 27°,20	236	2,2 %	10
	5	13,9 ... 8,7	26°,50 ... 27°,30	221	4,3 %	15
	5	14,6 ... 9,6	26°,88 ... 27°,34	237	2,6 %	09
			Mittel =	0,231		

Die Tabelle ergibt, dass die Übereinstimmung der aus den verschiedenen Beobachtungsreihen berechneten Elastizitätszahlen bedeutend besser ist wie bei den früheren Messungen der Stäbe 1 I, 2 I, 3 I. Nehmen wir einfach den Mittelwert der einzelnen μ-Werte als den wahrscheinlichsten Wert des

Poissonschen Koeffizienten an, so finden wir, dass bei 2 I die Werte sich um höchstens 1,6 % von diesem unterscheiden. Auch Krupp No. 2^a und Krupp No. 2^b, von denen leider nur wenig Beobachtungsreihen vorliegen, liefern recht gut übereinstimmende Werte.

Die Genauigkeit der übrigen Werte steht jedoch unter der von Straubel erreichten. Wir haben bei 1 I Abweichungen von 2,6 %, bei 1 II von 4,8 %, 2 II von 3,5 %, 4 I von 4 %, bei Krupp No. 3^a von 3 % und bei 4 II gar von 4,3 % — 5,2 % vom Mittelwert. Auffallend bleibt auch die Tatsache, dass unter recht gut übereinstimmenden Werten einzelne davon stark verschiedene auftreten. So beim Stab 1 II: Die meisten Beobachtungsreihen ergeben Werte zwischen 0,261 und 269 (Mittelwert = 0,264); eine Reihe ergibt aber 0,250, also einen Wert, der mit 0,264 sehr schlecht stimmt. Ähnliches Verhalten weisen auf die Stäbe Krupp No. 1^b und 4 II. Bei letzterem haben wir, wie es scheint, zwei Wertgruppen 0,220 und 0,237, um die herum die einzelnen μ-Werte liegen.

Prüfung der Methode.

17. Die Tatsache, dass die bei meinen Bestimmungen des Poissonschen Verhältnisses erzielte Genauigkeit zurückbleibt hinter der von Straubel erreichten, bedarf einer näheren Untersuchung und Begründung; um so mehr, als es Straubel noch für wahrscheinlich hielt[1]), dass das Bild von der Genauigkeit der Methode, das man nach seinen Messungen erhielt, etwas zu ungünstig sei.

Wie erklärt es sich dann aber, dass diese selbe Methode solche Differenzen zulässt, wie ich sie erhalten habe?

Dass wir aus einer grösseren Anzahl von Beobachtungsreihen verschiedene Werte einer Grösse erhalten können, kann in verschiedenen Ursachen begründet sein. Nehmen wir zu-

---

[1]) l. c. p. 395.

nächst an, die Formel, nach der die Beobachtungen ausgerechnet werden, werde von kleinen Beobachtungsfehlern nicht stark beeinflusst, dann werden auch Beobachtungsreihen, die annähernd gleich sind, nahezu gleiche Resultate liefern, verschiedene dagegen auch sich unterscheidende Werte ergeben. Hängt dagegen die Berechnungsformel stärker von einzelnen Beobachtungen resp. Beobachtungsfehlern ab, so ist noch nicht gesagt, ob annähernd gleiche Beobachtungsreihen auch gleiches Resultat ergeben. Vielmehr können kleine Beobachtungsfehler, die sich in nur kleinen Differenzen der Beobachtungsreihen äussern, grossen Einfluss auf die endgültigen Werte haben.

Drittens aber kann zwar die Berechnungsformel innerhalb weiterer Grenzen von kleinen Differenzen der Reihen unabhängig sein; sind dann aber die Voraussetzungen, die zur Aufstellung der Formel dienten, falsch oder ungenau, so werden die Resultate nicht übereinstimmen.

18. Nehmen wir jetzt an, die Änderung des Asymptotenwinkels werde vollständig erklärt durch das Vorhandensein einer Anfangskrümmung, so wird unter der Voraussetzung, dass die Hauptkrümmungsebenen parallel und senkrecht zur Biegungsebene liegen (oder bei angenäherter Lage) die Änderung des Asymptotenwinkels erfolgen, wie Straubel gezeigt hat, nach der Formel

$$\mu_n = tg^2 a_n = \mu + \frac{\nu}{n}.$$

Daraus ergab sich nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$\mu = \overline{\mu} + \frac{\Sigma \frac{1}{n} \Sigma n \Delta_n}{\Sigma \frac{1}{n} \Sigma n - (\Sigma 1)^2}$$

Es fragt sich nun, ob das Resultat, das nach dieser Formel ausgerechnet wird, in stärkerem Grade abhängig ist von kleineren Beobachtungsfehlern. Sie ist zur Berechnung brauchbar dann, wenn sie, falls sie für eine bestimmte Beobachtungsreihe einen bestimmten Wert μ ergeben hat, durch Übergang

zu nahe benachbarten Werten der Beobachtungsreihe, also bei der Variation der Beobachtungsreihe, einen μ nahen Wert ergibt. Um übereinstimmende Werte zu erhalten, müssen wir dies als Forderung aufstellen. Innerhalb welcher Grenzen ist sie aber erfüllt? Die Antwort auf diese Frage allgemein zu geben ist unmöglich. Wir müssen vielmehr die Grössenverhältnisse der einzelnen Glieder in der obigen Formel kennen, ehe wir eine Einsicht gewinnen können.

19. Wir wollen angenblicklich den Fall ausschliessen, dass wir für ein und denselben Stab sehr verschiedene Beobachtungsreihen haben, vielmehr mögen diese fast bis auf die mittleren Beobachtungsfehler übereinstimmen. Um nun zu erfahren, wann dann die Resultate dieser Beobachtungsreihen am besten zusammenpassen, müssen wir folgendes überlegen. μ setzt sich zusammen aus dem Mittelwerte der μ_n einer Beobachtungsreihe und einem Gliede $\dfrac{\Sigma \frac{1}{n} \Sigma n \Delta_n}{\Sigma \frac{1}{n} \Sigma n - (\Sigma 1)^2}$ das wir kurz **Korrektionsglied** nennen wollen. Dieses ist abhängig von der Veränderung des Asymptotenwinkels mit der Durchbiegung und von dieser selbst. Beobachten wir nun in einem bestimmten Intervall von Durchbiegungen, und ist die Änderung des Asymptotenwinkels gegenüber der Grösse des Nenners $\Sigma \frac{1}{n} \Sigma n - (\Sigma 1)^2$ klein, so wird die Übereinstimmung der μ-Werte, da ja auch die Mittelwerte $\bar{\mu}$ nahezu gleich sind, eine gute sein.

Nun liegen aber die Verhältnisse in Wirklichkeit komplizierter, da die Differenzen Δ_n nicht klein sind gegenüber dem Nenner. Wir betrachten deshalb die Grössenverhältnisse, wie sie sich aus den beobachteten Grössen n und μ_n tatsächlich ergeben haben.

Der Nenner des Korrektionsgliedes hängt gar nicht von der Änderung des Asymptotenwinkels, sondern nur von der Durchbiegung ab, während der Zähler von beiden abhängig ist.

Die Grösse des Nenners ist eine Funktion der Durchbiegungen; sie wird aber auch mitbestimmt durch die relative Grösse der einzelnen Durchbiegungen zu einander, sodass eine genaue Einsicht erst durch wirkliche Zahlen möglich wird. Die Werte, die sich aus meinen Ausrechnungen für den Nenner ergeben, liegen zwischen 0,21 und 5,3, sind also erheblichen Schwankungen unterworfen.

Vergleichen wir nun die Durchbiegungen und die Grösse des Nenners, so finden wir in dem Intervall von Durchbiegungen, über das sich meine Beobachtungen erstreckten, im allgemeinen die Beziehung, dass, je grösser die Durchbiegungen, besser gesagt, je grösser die kleinste Durchbiegung in einer Beobachtungsreihe ist, und je kleiner das Intervall, über das sich die Durchbiegungen erstrecken, desto kleiner der Nenner wird[1]), der, wie man beweisen kann, immer positiv bleibt[2]). Sind die kleinsten Durchbiegungen zweier ver-

---

[1]) Vergl. Tab. 4.

[2]) Es seien nämlich

$n_1, n_2, n_3 \ldots\ldots n_m$ m positive Zahlen.

Dann ist

$$\Sigma \frac{1}{n} \Sigma n = \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_m}\right)(n_1 + n_2 + \ldots\ n_m)$$

Durch Ausmultiplizieren und passende Anordnung erhält man:

$$\begin{aligned}\Sigma \frac{1}{n} \Sigma n = & \frac{n_1}{n_1} + \frac{n_2}{n_2} + \ldots \qquad + \frac{n_m}{n_m} \\ & + \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1}\right) + \left(\frac{n_1}{n_3} + \frac{n_3}{n_1}\right) + \ldots \quad + \left(\frac{n_1}{n_m} + \frac{n_m}{n_1}\right) \\ & + \left(\frac{n_2}{n_3} + \frac{n_3}{n_2}\right) + \left(\frac{n_2}{n_4} + \frac{n_4}{n_2}\right) + \ldots \quad \left(\frac{n_2}{n_m} + \frac{n_m}{n_2}\right) \\ & + \ldots\ldots \\ & + \left(\frac{n_{m-2}}{n_{m-1}} + \frac{n_{m-1}}{n_{m-2}}\right) + \left(\frac{n_{m-2}}{n_m} + \frac{n_m}{n_{m-2}}\right)\end{aligned}$$

schiedener Beobachtungsreihen nur wenig von einander verschieden, so kann man natürlich nicht mit Bestimmtheit von vornherein behaupten, der Nenner ist in dem einen Falle grösser als im andern, bei grösseren Unterschieden kann man es jedoch mit Sicherheit sagen.

Tatsächlich ist denn auch der Nenner bei den Stäben Krupp No. 1 — Krupp No. 3 immer grösser als bei den Stäben 1 I—4 II. Während bei diesen aus oben angeführten Gründen die Beobachtungen erst bei verhältnismässig hohen Durchbiegungen ($n = 8$ bis 10) begonnen werden konnten, war es bei jenen wegen ihrer Breite und der Länge der Hyperbeläste möglich, schon bei ganz niedrigen ($n = 4$—6) zu messen und das Intervall ebensoweit wie bei 1 I—4 II bis 14—16 auszudehnen.

Die Werte des Nenners bei Krupp No. 1 — No. 3 liegen durchgehend zwischen 1,0 und 5, während sie bei 1 I—4 II nur, wenn besonders günstige Oberfläche des Stabes eine Minimaldurchbiegung von ungefähr $n = 8$ erlaubte, den Wert 1 erreichten. Gewöhnlich lagen sie um $^1/_2$ herum.

$$+ \left(\frac{n_{m-1}}{n_m} + \frac{n_m}{n_{m-1}}\right)$$

Die erste Zeile ist aber $= m$, in der zweiten aber haben wir $(m-1)$ Glieder von der Form $\left(a + \frac{1}{a}\right)$, also jedes > 2, in der 3ten Zeile $(m-2)$ Glieder jedes > 2 usw. Es ist also

$$\Sigma \frac{1}{n} \Sigma n > m + 2\,(1 + 2 + \ldots\; m - 1).$$

$$> m + 2\,\frac{m\,(m-1)}{2}$$

$$\Sigma \frac{1}{n}\, \Sigma n > m^2 \text{ oder da } m^2 = (\Sigma\, 1)^2.$$

$$\Sigma \frac{1}{n} \Sigma n - (\Sigma\, 1)^2 > 0.$$

Es handelt sich nun noch um die Grösse des Zählers des Korrektionsgliedes. Ist die Änderung des Asymptotenwinkels gering, dann sind auch die Grössen $\Delta_n = \mu_n - \bar{\mu}$ klein. Nun werden diese multipliziert mit den entsprechenden n-Werten. Es ist klar, dass bei gleichen Differenzen Δ_n die Summe $\Sigma n\ \Delta_n$ um so grösser wird, je grösser (prozentisch) die n sind. Nun tritt ja teilweise eine Kompensation insofern ein, als bei gleich grossem Intervall der Durchbiegungen $\Sigma \frac{1}{n}$, mit dem ja $\Sigma n\ \Delta_n$ multipliziert wird, bei höheren Durchbiegungen kleiner ist als bei niedrigen. Eine Vergrösserung des Intervalles bewirkt eine Vergrösserung des Zählers, deren Stärke sich jedoch sehr schwer schätzen lässt.

Die folgende Tab. 4 bietet eine Übersicht über die aus den Beobachtungsreihen berechneten Grössen. Aus ihr ergeben sich die aufgestellten Beziehungen.

Tabelle 4.

Bezeichnung	$n_1 \dots n_m$	$\mu_1 \dots \mu_m$	$\bar{\mu}$	Nenner	$\Sigma n\ \Delta n$	Korrekt.	in % von $\bar{\mu}$ zirka
	9,9 ... 14,8	0,1807 ... 0,2104	0,1982	0,668	+ 0,0979	+ 0,0731	37%
	9,3 ... 14,7	1776 ... 1873	1961	637	1174	0809	41
11	10,8 ... 14,3	1936 ... 2088	2025	3355	0408	0573	28
	10,9 ... 14,2	1878 ... 2077	1999	300	0445	0716	36
	9,3 ... 14,6	1680 ... 2079	1878	802	1321	0893	48
	10,7 ... 14,9	0,1786 ... 0,2145	0,1970	0,3640	+ 0,1010	+ 0,1107	51%
	15,0 ... 10,8	2150 ... 1832	1992	3500	0873	0988	50
	9,3 ... 13,7	1699 ... 2127	1954	4300	1113	1154	59
	9,6 ... 14,7	1810 ... 2165	1986	5400	1100	0850	43
	16,3 ... 9,8	2265 ... 1960	2112	5780	1039	0688	32
21	11,8 ... 15,3	1844 ... 2112	1982	194	0585	1127	56
	9,4 ... 14,4	1760 ... 2039	1890	686	0923	0695	37
	8,6 ... 14,6	1867 ... 2106	1983	525	0727	0585	29
	8,4 ... 13,0	1593 ... 2069	1865	886	1595	1047	56
	9,7 ... 13,9	1784 ... 2075	1943	388	0701	0778	40
	9,2 ... 13,9	1755 ... 2114	1933	5840	1106	0835	43

Bezeichnung	$n_1 \dots n_m$	$\mu_1 \dots \mu_m$	$\bar{\mu}$	Nenner	$\Sigma n \, \Delta n$	Korrekt.	in $^0/_0$ von μ zirka
	9,3 ... 14,6	0,1767 ... 0,2140	0,1982	0,668	+ 0,1177	+ 0,0774	39 $^0/_0$
	8,7 ... 14,2	1758 ... 2157	1989	745	1328	0826	42
	7,9 ... 13,9	1777 ... 2172	1968	1,790	1935	0728	37
	9,8 ... 12,7	1955 ... 2117	2045	0,211	0296	0634	30
	9,3 ... 12,8	1887 ... 2157	2031	340	0632	0858	42
	9,3 ... 13,8	1891 ... 2184	2055	510	0873	0753	37
	9,4 ... 13,8	1911 ... 2155	2041	533	0761	0631	31
	14,0 ... 9,8	2166 ... 1936	2060	410	0574	0596	29
31	9,3 ... 13,8	1866 ... 2130	2007	533	0805	0659	33
	9,6 ... 14,7	1882 ... 2194	2041	650	1091	0710	35
	9,3 ... 13,4	1880 ... 2157	2026	427	0754	0786	39
	9,9 ... 13,6	1900 ... 2155	2051	304	0538	0760	37
	9,1 ... 13,6	1862 ... 2157	2013	4976	0829	0744	37
	9,4 ... 13,3	1864 ... 2163	2031	363	0703	0862	42
	9,2 ... 13,7	1846 ... 2192	2017	486	0961	0889	44
	9,7 ... 13,8	1918 ... 2174	2059	3924	3631	0694	34
	8,3 ... 12,4	1758 ... 2049	1905	514	0740	0708	37
	7,0 ... 12,3	0,1526 ... 0,2016	0,1797	1,098	+ 0,1682	+ 0,0830	46 $^0/_0$
	6,7 ... 11,0	1428 ... 1945	1710	0,816	1435	1027	60
Krupp No. 1[b]	6,9 ... 11,1	1474 ... 1982	1774	781	1426	1030	58
	6,5 ... 11,3	1420 ... 1992	1760	1,02	1760	1013	58
	12,1 ... 6,4	2041 ... 1407	1759	1,363	2430	1033	60
	5,7 ... 11,5	0,2048 ... 0,2441	0,2261	1,578	+ 0,1327	+ 0,0532	24 $^0/_0$
Krupp No. 2[a]	11,6 ... 6,2	2468 ... 2170	2322	1,134	0945	0494	21
	6,4 ... 11,1	2106 ... 2443	2271	0,984	0967	0592	26
	5,2 ... 11,6	2087 ... 2460	2273	2,133	1570	0473	21
	6,6 ... 13,7	0,3045 ... 0,2914	0,2968	1,61	— 0,0551	— 0,0178	6 $^0/_0$
Krupp No. 2[b]	15,0 ... 6,2	2909 ... 3114	3003	2,38	1035	0221	7
	13,7 ... 6,7	2946 ... 3146	3058	1,55	0802	0273	9
	14,4 ... 6,7	0,2789 ... 0,2853	0,2826	1,755	— 0,0273	— 0,0082	3 $^0/_0$
	4,3 ... 11,0	2894 ... 2805	2843	2,672	0395	0128	5
Krupp No. 3[a]	12,9 ... 7,0	2756 ... 2899	2833	1,15	0518	0231	8
	13,5 ... 7,0	2766 ... 2889	2826	1,35	0492	0190	7
	16,1 ... 7,7	2733 ... 2880	2813	1,595	0713	0208	7
	15,3 ... 7,9	2751 ... 2861	2805	1,418	0510	0159	6

Bezeichnung	$n_1 \dots n_m$	$\mu_1 \dots \mu_m$	$\overline{\mu}$	Nenner	$\Sigma n\ \Delta n$	Korrekt.	in % von $\overline{\mu}$ zirka
Krupp No. 3[b]	5,7 ... 13,0	0,3534 ... 0,3034	0,3255	2,077	— 0,2106	—0,0603	19%
	4,8 ... 9,3	3726 ... 3209	3397	1,364	1370	0752	22
	12,1 ... 4,3	3095 ... 3826	3346	4,715	3745	0637	19
	4,4 ... 12,2	3740 ... 3073	3351	5,31	3839	0618	19
	5,4 ... 12,0	3520 ... 3073	3249	1,956	1629	0535	17
	6,2 ... 11,7	3439 ... 3081	3220	1,254	1176	0547	17
1 I	14,0 ... 8,6	0,2909 ... 0,3119	0,3019	0,745	— 0,0712	—0,0435	14%
	14,2 ... 7,9	2897 ... 3149	3020	1,044	0944	0426	14
	13,3 ... 8,3	2887 ... 3081	2978	0,68	0579	0407	14
	14,0 ... 7,5	2911 ... 3152	3031	1,21	0967	0380	13
	13,2 ... 8,5	2897 ... 3075	2986	0,61	0496	0385	13
	14,2 ... 9,4	2877 ... 3047	2960	0,54	0553	0443	15
1 II	13,9 ... 6,9	0,2919 ... 0,3217	0,3068	1,614	— 0,1331	—0,0429	14%
	16,1 ... 8,4	2897 ... 3134	3011	1,24	1073	0371	12
	7,6 ... 13,1	3188 ... 2946	3068	0,947	0776	0412	13
	14,7 ... 7,5	2924 ... 3152	3047	1,467	1126	0381	13
	13,7 ... 8,8	2863 ... 3068	2965	0,621	0640	0469	16
	7,7 ... 12,7	3134 ... 2919	3024	0,805	0662	0419	14
	14,8 ... 9,0	2899 ... 3108	2999	0,781	0721	0398	13
	13,7 ... 8,3	2926 ... 3134	3024	0,771	0673	0408	14
	6,8 ... 12,0	3191 ... 2973	3079	1,02	0709	0388	13
2 I	13,3 ... 7,8	0,2885 ... 0,3076	0,2980	0,882	— 0,0606	—0,0330	11%
	13,1 ... 8,0	2887 ... 3073	2985	740	0553	0367	13
	13,7 ... 9,0	2902 ... 3060	2976	556	0479	0381	13
	13,7 ... 8,7	2899 ... 3078	2984	650	0536	0377	13
	13,5 ... 8,8	2909 ... 3075	2987	562	0494	0402	13
	8,6 ... 13,6	3091 ... 2899	2996	662	0597	0421	14
	14,0 ... 9,0	2907 ... 3080	2990	615	0548	0396	13
	13,8 ... 8,8	2912 ... 3088	2994	650	0554	0387	13
	13,7 ... 8,8	2999 ... 3088	2994	621	0555	0407	13
2 II	13,8 ... 8,7	0,2827 ... 0,2941	0,2879	0,639	— 0,0374	—0,0269	9%
	7,5 ... 12,5	2914 ... 2787	2854	835	0386	0239	8
	14,0 ... 8,6	2827 ... 2938	2883	73	0353	0218	8
	12,4 ... 8,0	2827 ... 2985	2903	61	0424	0350	12
	13.1 ... 8,5	2827 ... 2975	2900	604	0407	0318	11
	13,7 ... 8,4	2801 ... 2956	2882	76	0503	0307	11
	13,8 ... 8,7	2805 ... 2961	2884	665	0502	0345	12
	13,8 ... 8,6	2803 ... 2956	2885	698	0528	0348	11

Bezeichnung	$n_1 \dots n_m$	$\mu_1 \dots \mu_m$	$\bar{\mu}$	Nenner	$\Sigma n\ \Delta n$	Korrekt.	in % von $\bar{\mu}$ zirka
	6,6 ... 12,1	0,3098 ... 0,2887	0,3005	1,092	— 0,0702	—0,0371	12%
	5,9 ... 14,2	3132 ... 2827	2952	2,36	1470	0337	11
	6,3 ... 13,2	3159 ... 2849	2979	1,73	1312	0418	14
	6,5 ... 16,4	3159 ... 2803	2935	2,746	2076	0366	13
	5,0 ... 13,9	3214 ... 2873	3023	3,37	1707	0332	11
3I	13,6 ... 7,6	2849 ... 3035	2940	1.074	0704	0325	11
	13,3 ... 8,3	2853 ... 3007	2931	0,68	0458	0318	11
	13,8 ... 8,4	2858 ... 3020	2941	0,781	0563	0336	11
	14,2 ... 8,8	2875 ... 3005	2940	0,75	0493	0295	10
	14,2 ... 9,0	2875 ... 3045	2953	0,64	0381	0263	9
	13,7 ... 8,0	2926 ... 3096	2997	0,894	0608	0329	11
	13,0 ... 8,0	2922 ... 3096	2996	0,73	0511	0343	11
	13,7 ... 8,0	0,2851 ... 0,3012	0,2926	0,906	— 0,0583	— 0,0300	10%
	14,0 ... 8,7	2827 ... 2995	2913	0,71	0570	0363	13
	13,8 ... 8,8	2837 ... 2997	2918	0,61	0474	0355	12
	14,3 ... 9,1	2873 ... 3076	2979	0,656	0661	0443	15
3II	13,4 ... 8,0	2865 ... 3108	2985	0,816	0790	0465	16
	13,3 ... 8,9	2902 ... 3047	2972	0,492	0409	0385	13
	13,9 ... 8,8	2902 ... 3055	2971	0,66	0499	0343	12
	13,4 ... 8,5	2909 ... 3070	2979	0,66	0507	0358	12
	13,8 ... 8,7	2882 ... 3055	2964	0,66	0519	0359	12
	13,5 ... 8,8	0,2724 ... 0,2873	0,2790	0,568	— 0,0432	— 0,0352	13%
	14,5 ... 8,8	2676 ... 2863	2770	0,775	0609	0347	13
	13,1 ... 8,6	2682 ... 2853	2768	0,545	0467	0408	15
	13,6 ... 8,5	2710 ... 2863	2785	0,704	0478	0315	11
4I	12,9 ... 8,0	2733 ... 2909	2821	0,706	0526	0363	13
	14,8 ... 9,0	2662 ... 2865	2762	0,787	0765	0428	16
	12,9 ... 8,0	2715 ... 2892	2791	0,716	0544	0375	13
	12,9 ... 7,9	2719 ... 2897	2795	0,75	0553	0365	13
	13,7 ... 7,9	2705 ... 2899	2791	0,935	0689	0359	13
	13,8 ... 8,1	0,2529 ... 0,2618	0,2573	0,858	— 0,0330	— 0,0182	7%
	13,3 ... 7,9	2421 ... 2561	2491	0,763	0471	0299	12
4II	14,7 ... 9,1	2508 ... 2620	2567	0,692	0372	0231	9
	13,4 ... 8,0	2521 ... 2641	2588	0,816	0392	0229	9
	13,9 ... 8,7	2486 ... 2664	2579	0,698	0572	0371	14
	14,6 ... 9,6	2570 ... 2673	2621	0,556	0326	0248	9

Im ganzen würde also das Korrektionsglied um so kleiner werden, je niedriger wir das Intervall der Belastungen, das wir über eine grössere Strecke ausdehnen, beginnen und je weniger sich der Asymptotenwinkel ändert. Ist die Änderung nur klein, so werden die Mittelwerte $\bar{\mu}$ bei annähernd gleichen Beobachtungsreihen beinahe gleich sein und da die Korrektionsglieder klein sind, werden wir übereinstimmende Werte von μ erhalten.

20. Ändert sich jedoch der Asymptotenwinkel α stärker mit der Durchbiegung, so werden auch kleinere Fehler in der Bestimmung der Grössen μ_n und n wegen der Grösse der Glieder Δ_n einen grossen Einfluss auf den Wert von $\Sigma n \Delta_n$ haben; je kleiner nun noch der Nenner des Korrektionsgliedes ist, desto stärker wird die Unsicherheit in der Grösse des Korrektionsgliedes und mithin auch der Endwerte der μ. Es wirken also hohe Durchbiegungen in zweifachem Sinne ungünstig ein auf die Grösse der Korrektion. Diese Tatsache gewinnt noch an Bedeutung, wenn wir die wirklichen Grössenverhältnisse in Betracht ziehen. Wie wichtig überhaupt die Berücksichtigung des Korrektionsgliedes ist, erhellt aus der Tatsache, dass es bei meinen Messungen bis 60 % des Mittelwerts $\bar{\mu}$ ausmacht[1]). In Prozenten desselben beträgt die Grösse der Korrektion bei den ersten Messungen an den Stäben 1 I, 2 I, 3 I durchschnittlich 35—45 %, bei den spätern Messungen 12—16 %. Am kleinsten ist es bei den Stäben Krupp No. 2^b und 3^a, nämlich 3—9 %. Zu beachten ist dabei der Umstand, dass diese Werte bezogen sind auf $\bar{\mu}$, die teils grösser, teils kleiner sind als die μ, je nachdem α mit der Durchbiegung ab- oder zunimmt. Um eine Vergleichung zu ermöglichen, würden wir die Korrektionsglieder zweckmässiger auf die μ-Werte beziehen. Dann wird der prozentische Anteil bei den Stäben, bei denen $\bar{\mu}$ kleiner als μ ist, kleiner also für die ersten Werte der Stäbe 1 I, 2 I, 3 I, für Krupp No. 1^b und 2^a.

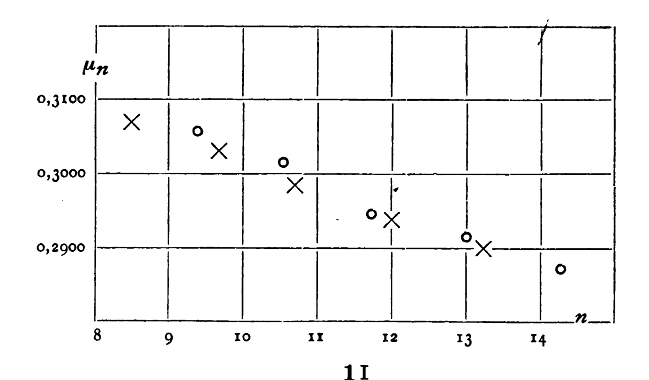
---

[1]) Vgl. Tab. 4.

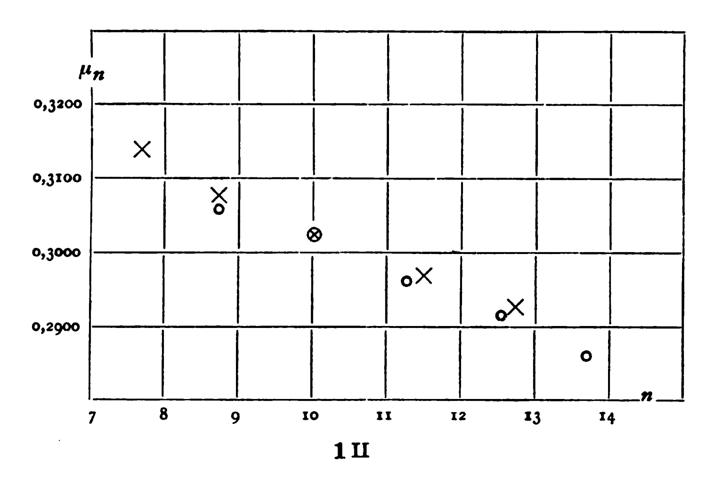
Für die andern dagegen erhöht er sich etwas. Doch bleiben auch dann noch grosse Unterschiede in den prozentischen Einflüssen zwischen den Werten des Korrektionsgliedes nach den ersten und den späteren Messungen. Bei 2I z. B. macht die Korrektion durchschnittlich 30—40 % von μ aus in den ersten Messungen, bei den späteren dagegen nicht ganz 17 %.

Im Vergleich dazu sind die Korrektionsglieder, die sich aus den Beobachtungsreihen von Straubel ergeben, bedeutend geringer als bei 1I, 2I, 3I (erste Messungen), dagegen kommen Werte von derselben Grössenordnung vor, wie in den späteren Messungen, wenn auch kleinere Werte häufiger sind als bei mir.

21. Ein Beweis, dass die Ausrechnungsformel nicht immer geeignet ist, brauchbare Werte zu liefern, liegt in der Tatsache, dass sie für Beobachtungsreihen, die nahezu bis auf die mittleren Fehler der Einzelbeobachtungen übereinstimmen, recht verschiedene μ-Werte ergibt. Einen Vergleich zwischen mehreren Beobachtungsreihen erhalten wir am übersichtlichsten durch die graphische Darstellung, indem wir die Durchbiegungen n als Abscissen und die μ_n als Ordinaten abtragen. Ich habe hier je 2 solche nahe übereinstimmende Beobachtungsreihen für die Stäbe 1 II und 1 I dargestellt. Die Werte von μ betragen aber trotz dieser Übereinstimmung bei 1 II 0,250 und 0,260, für 1 I 0,252 und 0,260!!



1 I



1 II

Eine solche Abhängigkeit der Werte von so kleinen Differenzen der Beobachtungsreihen war natürlich nicht immer vorhanden. Immerhin ist doch die Möglichkeit erwiesen. Da nach den vorhergehenden Auseinandersetzungen die Übereinstimmung der Werte eine bessere wird, wenn der Asymptotenwinkel sich nur ganz wenig ändert und wenn wir bei niedrigen Durchbiegungen beobachten, müssen wir diese Bedingungen als Forderungen aufstellen. Sie sind bei den Beobachtungen Straubels besser erfüllt als bei meinen. Es erklärt sich das dadurch, dass an die Glasprismen verhältnismässig leicht ebene Flächen angeschliffen werden konnten, während es bei den Stahlstäben nur unvollkommen möglich war. Zweitens aber waren fast alle Glasstäbe breiter als meine Stahlstäbe, und es war deshalb wegen der grösseren Länge der Hyperbeläste möglich, schon bei sehr niedrigen Durchbiegungen zu beobachten. Die Folge davon ist eine bessere Übereinstimmung der von Straubel berechneten Werte. Erheblichere Differenzen kommen nur bei dem Glas No. 1991 vor, bei dem die Durchbiegungen, da es nur 1 cm breit war, mit $n = 6$ (sonst $n = 3$—4) begonnen werden konnten.

22. Teilweise werden die Verschiedenheiten der Werte durch verschiedene Beobachtungsreihen erklärt. Bei einer

Reihe von Stäben sind nämlich die einzelnen Beobachtungsreihen, wie man aus der graphischen Darstellung derselben erkennt, recht verschieden, während bei andern (2 I, 3 I spätere Messungen) die Abweichungen nur wenig mehr als die mittleren Fehler der einzelnen Messungen betragen. Übrigens finden sich solche Reihen, wenn auch nicht so stark verschieden, auch in den Beobachtungen Straubels. Bei diesen Reihen sind natürlich auch die einzelnen $\overline{\mu}$ sehr verschieden. Nun wird ja eine Kompensation insofern eintreten, als auch die Korrektionsglieder von einander abweichen. Doch in dem Falle, welcher auch beobachtet wurde, dass sich zwei Beobachtungsreihen um eine im ganzen Verlaufe von μ_n ziemlich konstante Grösse unterscheiden, sodass also, wenn wir die zu gleichen n gehörigen μ_n mit μ_n' und μ_n'' bezeichnen, immer war: $\mu_n'' = \mu_n' +$ konst., muss auch in den Resultaten eine Differenz auftreten.

23. Besonders auffallend war diese Erscheinung bei dem Stabe 4 II, schwächer bei 1 II und 3 II. Gerade bei diesen Stäben war aber eine besonders schiefe unregelmässige Lage der Anfangskrümmungen vorhanden. Es wäre möglich, dass bei schiefer Lage der Anfangskrümmungen eine nur wenig veränderte Auflage der Stäbe auf die Schneiden des Durchbiegungsapparates bewirkt, dass der Asymptotenwinkel bei derselben Durchbiegung verschieden ausfällt, während er, wenn die Anfangskrümmungen in der Längs- und Querrichtung des Stabes liegen, von kleinen Verschiedenheiten der Auflage unabhängig ist. Direkte Bestätigungen dieser Vermutung konnten nicht erbracht werden, da eine systematische Prüfung des Einflusses der Auflage auf die Grösse des Asymptotenwinkels wegen der Unmöglichkeit einer Schätzung der vorgenommenen Änderung der Auflage nicht durchgeführt werden konnte.

Vielleicht aber spricht noch für sie die Tatsache, dass bei den Stäben mit schiefer Lage der Anfangskrümmung der Gang des μ_n mit der Durchbiegung nicht so regelmässig war,

wie bei den Stäben mit regelmässiger Anfangskrümmung. Es ist sehr wahrscheinlich, dass bei der schiefen Lage und bei Unregelmässigkeit in der Beschaffenheit der Oberfläche eines Stabes, die Darstellung des Verlaufs von μ_n durch die Formel $\mu_n = \mu + \frac{\nu}{n}$ nicht mehr gilt. So erkennen wir aus den Photogrammen[1]), die bei unbelastetem Stabe aufgenommen sind, dass die Anfangskrümmungen regelmässig liegen bei 2 I, 4 I. Dagegen schief bei 1 II und 4 II. Unregelmässigkeiten der Oberfläche weist auf der Stab 1 I. Vergleichen wir nun die Beobachtungsreihen, die sich für diese Stäbe ergeben haben, so finden wir, dass diese bei den Stäben mit regelmässiger Oberfläche gut übereinstimmen und den hyperbolischen Gang von μ_n mit n haben, während bei den Stäben mit Oberflächenfehlern resp. schiefer Lage der Anfangskrümmungen die einzelnen Beobachtungsreihen sich recht stark unterscheiden (4 II) und einen Verlauf des μ_n mit n haben, der der Formel $\mu_n = \mu + \frac{\nu}{n}$ gar nicht entspricht, wie die Tatsache beweist, dass in der Kurve $\mu_n = f(n)$ Wendepunkte vorkommen.

Die Berücksichtigung aller dieser Verhältnisse bei der Aufstellung einer neuen Formel ist sehr schwer, da wir ja die Lage der Hauptkrümmungen im Anfangszustand gegen die Durchbiegungsebene als variabel einführen müssten, über den Einfluss von Oberflächenfehlern aber überhaupt keinen Anhaltspunkt haben. Praktisch kommt sie nicht in Betracht, da wir wegen der Asymmetrie und der schiefen Lage der Anfangskrümmungen, also auch der Hyperbeln, erst bei hohen Durchbiegungen, wo diese verschwindet, Beobachtungen an-

---

[1]) Die Photogramme 2 I, 1 II, Krupp 3^b sind aufgenommen bei unbelastetem Stabe; 1 I, 4 I, 4 II bei etwas belastetem, da die unscharfen Kurven in der Anfangslage eine Fixierung nicht erlaubten. 3^b ist aufgenommen direkt nach dem Schleifprozess. Die andern Stäbe sind jedoch schon belastet gewesen. Die Tatsache, dass alle Stäbe schon sattelförmige Oberflächen haben, erklärt sich vielleicht durch Nachwirkungen.

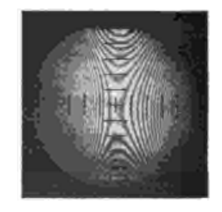
1 I schwach belastet.

1 II unbelastet.

2 I unbelastet.

4 I stärker belastet.

4 II stärker belastet.



Krupp No. 3 b unbelastet[1]).

stellen könnten, was wieder die oben angeführten Übelstände im Gefolge hat.

24. Um also mit der Cornuschen Methode übereinstimmende Resultate zu erhalten, müssen wir fordern, dass

---

[1]) Krupp No. 3 b zeigt eine starke Anfangskrümmung.

die Anfangskrümmungen der Stäbe nur schwach sind, dass Oberflächenfehler nicht vorkommen, dass die Hauptkrümmungen in der Längs- und Querrichtung liegen, und dass die Stäbe eine gewisse Breite (2 cm) haben.

Die Messungen Straubels an Gläsern.

25. Es ist schon mehrfach hervorgehoben worden, dass die μ-Werte, die Straubel für einzelne Schottsche Gläser erhielt, viel besser untereinander übereinstimmten, als bei meinen Messungen an Stahlstäben. Ich habe auch schon die Gründe angegeben, die diese Tatsache erklären. Ich stelle sie hier nochmals kurz zusammen. Aus den Beobachtungsreihen Straubels erkennen wir, dass die mittlere Änderung des Asymptotenwinkels mit der Durchbiegung fast durchgängig kleiner ist als bei meinen Messungen, wenn sie auch in Ausnahmefällen die Grössenordnung wie bei meinen Bestimmungen erreicht. Diese geringe Änderung des Asymptotenwinkels erklärt sich aus einer nur geringen Anfangskrümmung. Es scheint also ziemlich leicht zu sein, an Glasprismen annähernd ebene Flächen anzuschleifen. Dass die Anfangskrümmung eine regelmässige war (nur in 4 Fällen nicht), sagt Straubel selbst. Nach den oben gegebenen Betrachtungen mussten die Beobachtungsreihen ziemlich gut übereinstimmen. Da ausserdem alle Bedingungen dafür, dass das Korrektionsglied klein wird, vorhanden waren, nämlich: geringe Änderung des Asymptotenwinkels infolge von nur geringer und regelmässiger Anfangskrümmung, und genügende Breite der Stäbe, die es ermöglichte, das Intervall der Durchbiegungen niedrig zu beginnen und über eine grössere Strecke auszudehnen, so ist es erklärlich, dass die von Straubel gefundenen Werte μ so gut untereinander übereinstimmen, und dass sie nur mit kleineren Fehlern behaftet sind.

Elastizitätszahl μ, Elastizitätsmodul E u. chemische Zusammensetzung.

In der folgenden Tabelle 5 sind angegeben die Werte der Elastizitätszahl μ (nach Tab. 3), die Elastizitätsmoduln E[1]) und der Kohlenstoffgehalt C der einzelnen Stahl- und Flusseisensorten. (Siehe Tab. 5.)

Nach Tabelle 3 beträgt die Genauigkeit der angegebenen Werte μ ungefähr 2—3 %. Aus einem Vergleich mit Tabelle 3 erkennen wir, dass die Unterschiede in den μ-Werten, die sich für die verschiedenen Stäbe derselben Stahlsorte ergeben, nicht grösser sind als die Differenzen der Werte für ein und denselben Stab.

27. Bedenkt man, dass der Wert des Poissonschen Verhältnisses selbst für die verschiedensten Körper nur relativ

[1]) E wurde bestimmt aus Biegungsbeobachtungen (Methode der Spiegelablesung). Vergl. Winkelmann, Wied. Ann. 61, pag. 105, 1897. Thomas, Der longit. Elast.-Koeff. eines Flusseisens, Inaug.-Diss. Jena 1899. E. Wandersleb, l. c.

Tabelle 5.

Bezeichnung	Krupp No. 1		Krupp No. 2		Krupp No. 3		1		2		3		4	
	a	b	a	b	a	b	I	II	I	II	I	II	I	II
μ	0,2600	0,2744	0,2805	0,2787	0,2660	0,2687	0,2585	0,2626	0,2604	0,2581	0,2629	0,2583	0,2418	0,2310
	0,267		0,280		0,267		0,261		0,259		0,261		0,236	
E	20780	20580	20710	20790	20220	20320	21160	21480	21320	21600	21200	21210	20500	19850
	20680		20750		20270		21320		21460		21205		20180[2])	
C	0,56		0,61		0,23		1,30		1,40		2,0		1,1	

[2]) Bei 4 II beträgt der Unterschied der Maximal- und Minimaldicke 0,09 mm. Der Maximal- resp. Minimaldicke entsprechen die Elastizitätsmoduln 18960 resp. 20790, die Differenzen aufweisen, die bedeutend grösser sind als die Unterschiede von E für 4 I u. 4 II.

geringe Unterschiede aufweist, so waren von vornherein für die Stahl- und Flusseisensorten, die ich untersuchte, bei der nicht wesentlich verschiedenen chemischen Zusammensetzung derselben, Werte von μ, die stark von einander abwichen, nicht zu erwarten. Die Messungen bestätigten dies, denn sie ergaben nur für einige Stäbe Werte, die beträchtlicher von dem am häufigsten vorkommenden Werte $\mu = 0{,}26$ sich unterscheiden.

Bei dieser geringen Verschiedenheit der μ-Werte und bei den nur kleinen Differenzen in der chemischen Zusammensetzung (C schwankt zwischen 0,23 % (Krupp No. 3) und 2 % (Stäbe 3) liess sich eine Abhängigkeit der Elastizitätszahl μ vom Kohlenstoffgehalt und der chemischen Zusammensetzung nicht konstatieren, wollte man nicht auch Bestandteilen, die nur in geringen Quantitäten vorhanden waren, einen grösseren Einfluss zuschreiben. Dies wäre aber mindestens gewagt gewesen.

Eine Einsicht in die Abhängigkeit der Elastizitätszahl von der chemischen Zusammensetzung hätte man vielleicht erhalten können durch Bestimmung von μ für Stäbe, die bestimmte Bestandteile (Kohlenstoff Mangan) in bestimmten steigenden Prozentsätzen enthielten. Wünschenswert wäre auch die Untersuchung möglichst extrem zusammengesetzten Materials gewesen, um zu sehen, innerhalb welcher Grenzen überhaupt die Werte der Elastizätszahl liegen.

28. Ebensowenig liess sich ein Zusammenhang zwischen Elastizitätszahl μ und longitudinalem Zugelastizitätsmodul E nachweisen. Zur Tabelle 5 sei bemerkt, dass die Werte des Elastizitätsmoduls E wegen der Schwankungen in der Dicke der Stäbe (0,3—1,6 %) auf ungefähr 1—5 % unsicher sind.

29. Vergleichen wir schliesslich die Werte des Verhältnisses der Querkontraktion zur Längendilatation, die ich für Stahl- und Flusseisen erhalten habe, mit den von andern Beobachtern für Eisen und Stahl ermittelten, so finden wir (vgl.

Handbuch der Physik, herausgeg. von Winkelmann, Bd. I, pag. 246f., 1891), dass meine Resultate am besten übereinstimmen mit denen von Mallock, Littmann, Benton (0,253; 0,243; 0,276). Die Werte der andern Beobachter liegen meistens höher. Es ist möglich und sehr wahrscheinlich, dass andere chemische Zusammensetzung und physikalische Vorgeschichte der Stäbe die Unterschiede der Werte bedingt.

Bemerkungen zu einer Arbeit Schäfers.

30. Zum Schlusse sei es mir gestattet, einige Bemerkungen zu einer Arbeit zu machen, die ebenfalls die Cornusche Methode zur Bestimmung des Verhältnisses der Querkontraktion zur Längendilatation benutzt. Herr Schäfer[1]) findet bei niedrig schmelzenden Substanzen für μ Werte, die, je mehr man sich dem Schmelzpunkt nähert, dem Wert $^1/_2$ zustreben und ihn bei der Schmelztemperatur anzunehmen scheinen.

Die Stäbe aus niedrig schmelzenden Metallen und Legierungen, die zur Untersuchung gebraucht wurden, wurden zwischen Spiegelglasplatten gegossen. Da ihre Oberfläche sich sehr schnell oxydierte, mussten die Stäbe öfters, unter Umständen schon nach 5 Minuten umgegossen werden. Leider ist nichts darüber gesagt, inwieweit die Oberflächen Unregelmässigkeiten aufwiesen.

31. Schäfer fand nun bei einigen Stäben Werte, die sehr schlecht übereinstimmten und, da sie grösser als $^1/_2$ „unmöglich" sind. Dass verschiedene Werte, ja jeder beliebige Wert möglich sind, erklärt Schäfer damit, dass er annimmt, die Elastizitätsgrenze sei in diesen Fällen überschritten worden. In diesem Falle wäre es natürlich nicht richtig, μ als das Verhältnis der Hauptkrümmungen zu bestimmen, das ja in

---

[1]) Cl. Schäfer: Über die Elastizitätszahlen einiger Stoffe mit niedrigem Schmelzpunkte. Drudes Annal. 9, 1124, 1902.

diesem Falle jeden Wert annehmen kann. Dass die Elastizitätsgrenze bei einem Stabe nicht überschritten worden war, wurde an dem Verschwinden der Hyperbeln beim Nachlassen der Belastungsschraube konstatiert. Verschwinden die Hyperbeln, und sind die Interferenzlinien bei unbelastetem Stabe Gerade, so ist die Oberfläche des Stabes eben. Dann ändert sich nach den Beobachtungen Straubels und nach den meinen der Asymptotenwinkel $2a$ nicht mit der Durchbiegung und es ist $\mu = tg^2 a$.

32. Leider hat Herr Schäfer seine Beobachtungsreihen nicht mitgeteilt. Man hat kein Urteil darüber, in welchem Masse $2a$ sich ändert. Es wäre nur möglich, dass die Verhältnisse ähnlich lagen wie bei meinen ersten Messungen an den Stäben 1 I, 2 I, 3 I. Dann aber erklärt es sich, dass Schäfer so verschiedene Werte für ein und denselben Stab erhielt, ohne dass man anzunehmen braucht, die Elastizitätsgrenze sei überschritten worden. Vielleicht auch wirkte beides zusammen.

Herr Schäfer findet die Beobachtungen Straubels bestätigt. Dass Herrn Straubel der Umstand, dass man sehr verschiedene Werte für μ erhalten kann, nicht aufgefallen ist, erklärt er damit, dass bei dessen Untersuchungen die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wurde. Nun haben wir aber auch bei den Straubelschen Werten Differenzen, und bei meinen Messungen ergeben sich sogar ganz erhebliche, ohne dass die Elastizitätsgrenze überschritten wurde. Wir haben gesehen, dass sie eine Folge von Unregelmässigkeiten der Oberflächenbeschaffenheit der Stäbe sind. Ob nicht etwa die Verschiedenheit in den Schäferschen Werten teilweise darauf zurückzuführen ist, kann nicht entschieden werden, da die Beobachtungsreihen nicht vorliegen.

Bedenkt man endlich, dass ein Umgiessen eines Stabes zwischen Spiegelglasplatten eine immer gleiche Beschaffenheit, insbesondere auch Isotropie, nicht garantiert, so scheint es

durchaus nicht ausgeschlossen, dass die Werte für μ verschieden ausfallen und selbst grösser als $^1/_2$ sind.

Zusammenfassung.

1. Die Cornusche Interferenzmethode zur Bestimmung des Verhältnisses der Querkontraktion zur Längendilatation liefert übereinstimmende Werte, wenn die Oberfläche der Stäbe eine nur schwache und regelmässige Anfangskrümmung besitzt.

2. Unregelmässigkeiten der Oberflächenbeschaffenheit, schiefe Lage der Anfangskrümmungen gegenüber der Biegungsebene, geringe Breite eines Stabes und die Anwendung hoher Durchbiegungen üben auf die Genauigkeit der Werte μ einen ungünstigen Einfluss aus.

3. Die Elastizitätszahlen μ der untersuchten Stahl- und Flusseisensorten liegen zwischen 0,22 und 0,28.

4. Bei den geringen Unterschieden in der chemischen Zusammensetzung (C variiert zwischen 2 u. 0,23%) konnte ein Einfluss des Kohlenstoffgehaltes auf die Grösse der Elastizitätszahl μ nicht konstatiert werden, ebensowenig ein Zusammenhang von Elastizitätszahl μ und Elastizitätsmodul E.

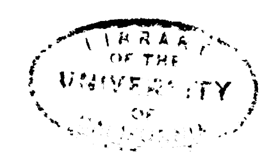
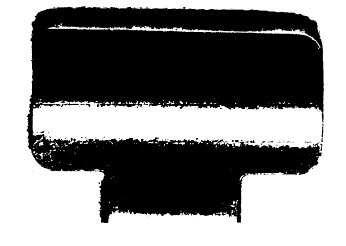
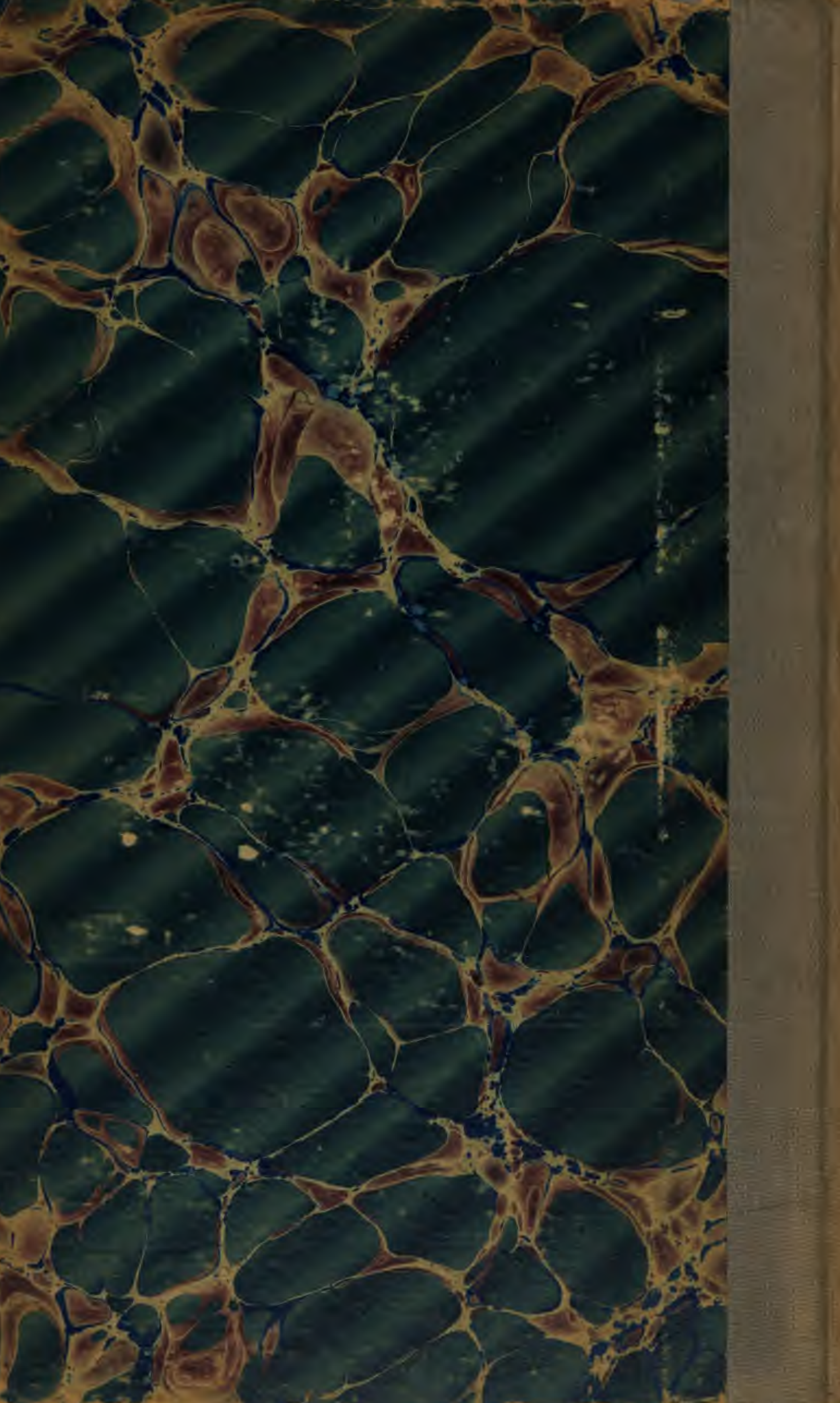
Zum Schlusse erfülle ich die angenehme Pflicht, Herrn Prof. Dr. Straubel, dem ich die Anregung zu meiner Untersuchung verdanke, und Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. Winkelmann für ihre Unterstützung meinen besten Dank auszusprechen.

Phys. Institut der Universität Jena 1903.

Lebenslauf.

Ich, Otto Erich Wagner, wurde am 2. September 1879 in Zwätzen geboren. Ich besuchte das Gymnasium in Jena und erhielt Ostern 1898 das Zeugnis der Reife. Seitdem studierte ich in Jena Mathematik und Naturwissenschaften und nahm Teil an den Vorlesungen und Übungen der Herren Auerbach, Frege, Gutzmer, Haeckel, Knopf, Knorr, Liebmann, Linck, Schaeffer, Stahl, Straubel, Thomae, Winkelmann, Wolff.

Ihnen allen bin ich zu grossem Danke verpflichtet.



QC191
W3
140243